Syllabus Functionaalanalyse

J. Wiegerinck

Korteweg-de Vries Instituut, FNWI, Universiteit van Amsterdam

1994, gewijzigd 1997, gewijzigd door T. H. Koornwinder in 2005
huidige versie: 27 september 2007

Voorwoord.

Dit is de syllabus die van 1994 tot/met het academisch jaar 2004–2005 bij de UvA gebruikt is voor het derdejaars-vak Functionaalanalyse. De stof is voor een groot deel ontleend aan:

I. Gohberg & S. Goldberg, Basic operator theory, Birkhäuser, 1980,
recent opgevolgd door:
I. Gohberg, S. Goldberg & M. A. Kaashoek, Basic classes of linear operators, Birkhäuser, 2003;
J. Korevaar, syllabus van het college Hilbert- en Banachruimte methoden, 1978;
J. Korevaar, Lecture notes Fourier analysis, 1991;
W. Rudin [1], Functional analysis, McGraw Hill;
W. Rudin [2], Real and complex analysis, McGraw Hill.

Voorkennis voor dit college zijn de analyse-vakken uit de eerste 2 jaar en het vak integratietheorie. De syllabus gaat over vrij algemene functionaalanalyse en over operatorentheorie. Deze zal tot en met de spectraalstelling voor compacte zelfgeadjungeerde operatoren ontwikkeld worden. Daarnaast zullen enige toepassingen behandeld worden. Het spreekt vanzelf dat in een zo korte tijd alleen een beperkt onderdeel van de lineaire analyse oppervlakkig kan worden bestudeerd. In het bijzonder worden veel stellingen slechts voor Banachruimten geformuleerd, ook als een algemenere setting mogelijk is. De geïnteresseerde lezer verwijs ik graag naar de syllabus Voortgezette functionaalanalyse en naar de literatuur. Rudin [1] is wat abstracter en veronderstelt een degelijker achtergrond in analyse dan Gohberg-Goldberg-Kaashoek. Het laatste boek sluit naadloos aan op lineaire algebra. Rudin [2] is nuttig voor een beknopte inleiding in de algemene functionaalanalyse. Overigens kan men hier ook de benodigde integratietheorie, wat Fourier-analyse (en nog veel meer) vinden. Er is een enorme hoeveelheid boeken over functionaalanalyse en operatorentheorie geschreven. Hieronder een kleine, vrij willekeurige selectie.

Aanvullende literatuur:

S. Banach, Théorie des operations linéaires, 1932, heruitgave Chelsea;
J. B. Conway, A course in functional analysis, Springer, 1985;
N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear operators, Interscience, 1958 (naslagwerk);
P. R. Halmos, A Hilbert space problem book, Springer, 1982 ((vrij lastige) Opgaven, hints, uitwerkingen);
M. Reed and B. Simon, Methods of modern mathematical physics, 4 dl (voor een fysisch perspectief);
K. Saxe, Beginning functional analysis, Springer-Verlag, 2001;
M. Schechter, Principles of functional analysis, AMS, 2001, 2nd edition;

G. F. Simmons, Introduction to topology and modern analysis McGraw-Hill, 1963, reprinted by Robert E. Krieger Publishing Co., 1983;
A. E. Taylor and D. C. Lay, Introduction to functional analysis, Wiley, 1980;
K. Yoshida, Functional analysis, Springer, 1968.

In de uitgave van 1997 waren een groot aantal kleine onnauwkeurigheden verbeterd en zijn enkele ondergeschikte wijzigingen aangebracht. Graag wil ik (JW) dr. E. Hendriksen bedanken voor het aanwijzen van veel onvolkomenheden in de oorspronkelijke uitgave. In de huidige uitgave van 2005 zijn door T. H. Koornwinder wederom een aantal kleine onnauwkeurigheden verbeterd en is wat achtergrondmateriaal toegevoegd (opmerkingen waarvan het nummer met **K** begint). Hoofdstuk 8 (zwakke topologie) is geheel nieuw. Grotere wijzigingen zijn er in hoofdstukken 6 (Hahn-Banach), 9 (spectrum) en 12 (Sturm-Liouville).

Inleiding

Functionaalanalyse of ook wel lineaire analyse is in zekere zin lineaire algebra op oneindig-dimensionale vectorrruimten waarop een zekere topologie ligt, bijvoorbeeld afkomstig van een door een inproduct geïnduceerde norm. Het vakgebied is in de afgelopen 110 jaar tot ontwikkeling gekomen. Het ging aanvankelijk niet om de generalisatie van lineaire algebra maar om het oplossen van lineaire differentiaal- en integraalvergelijkingen. Beschouw eens de vergelijking

$$f'(t) = g(t), \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

waar g een gegeven functie is en we f moeten vinden. De oplossing is hier simpel, $f(t) = \int_0^t g(s)\,ds + c$. Voor algemenere differentiaalvergelijkingen is een oplossing niet zomaar op te schrijven. Wat is de relatie met lineaire algebra? Bekijk

$$D : C^1([0,1]) \to C([0,1]), \quad D(f) = f'. \tag{2}$$

De ruimten $C^1([0,1])$ en $C([0,1])$ hebben de gebruikelijke vectorruimte-structuur, maar zijn natuurlijk oneindig-dimensionaal, in het bijzonder wordt een functie als een punt opgevat; D is nu "gewoon" een lineaire afbeelding. Het oplossen van (1) wordt het oplossen van een inhomogene lineaire vergelijking $D(f) = g$. De functionaalanalyse kan ook worden losgelaten op situaties waarin men geen expliciete oplossing heeft. Men kan zo bijvoorbeeld existentie van oplossingen bewijzen of eigenschappen van oplossingen afleiden. In hoofdstuk 10 zullen we hier iets van zien. De meetkunde van de functieruimten kwam in het begin van de eeuw tot ontwikkeling, eerst aan de hand van concrete ruimten als $C([0,1])$. In Banach's proefschrift wordt lineaire analyse voor het eerst abstract opgezet. Zijn boek bevat de fundamentele stellingen over Banachruimten.

1. Vectorruimten en metriek.

In dit hoofdstuk worden Hilbert- en Banachruimten geïntroduceerd. We maken van de gelegenheid gebruik om kennis uit eerdere colleges die hier nuttig is, op te halen. We beginnen met het opsommen van een aantal begrippen die in topologie of integratietheorie aan de orde zijn gekomen.

Zij V een vectorruimte over een lichaam $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ of $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.1. Definitie. Een *metriek* op V is een afbeelding $d : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die voldoet aan

$$\begin{aligned} (i)\ & d(x,y) = 0 \iff x = y \\ (ii)\ & d(x,y) = d(y,x) \quad \text{(symmetrie)} \\ (iii)\ & d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \text{(driehoeksongelijkheid)} \end{aligned}$$

Een *norm* is een afbeelding $\| \ \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die voldoet aan

$$\begin{aligned} (i)\ & \|x\| = 0 \iff x = 0 \\ (ii)\ & \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \alpha \in \mathbb{K} \\ (iii)\ & \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{(driehoeksongelijkheid)} \end{aligned}$$

Een *inproduct* (inwendig product) is een sesqui-lineaire afbeelding $\langle \ , \ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ die voldoet aan

$$\begin{aligned} (i)\ & \langle x, x \rangle \geq 0, \\ (ii)\ & \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0, \\ (iii)\ & \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle, \quad \text{(antisymmetrie)} \\ (iv)\ & \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \text{(lineariteit).} \end{aligned}$$

Sesqui betekent anderhalf, en inderdaad het inproduct is lineair in de eerste veranderlijke, maar slechts half lineair, nl. alleen voor reële scalairen, in de tweede veranderlijke. Een inproduct $\langle \ , \ \rangle$ induceert een norm door $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$. Een norm induceert een metriek door $d(x, y) = \|x - y\|$.

Ruimten met inproduct lijken het meest op $\mathbb{R}^n$, $(\mathbb{C}^n)$. In een inproduct-ruimte over $\mathbb{R}$ heeft men een hoekbegrip: de cosinus van de hoek α tussen twee vectoren x en y is

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

K1.1. Opmerking Een vectorruimte over $\mathbb{C}$ wordt een vectorruimte over $\mathbb{R}$ door de scalars te beperken van $\mathbb{C}$ tot $\mathbb{R}$. Zo wordt de complexe vectorruimte $\mathbb{C}^n$ met coördinaten

$$(z_1, \ldots, z_n) = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$$

de reële vectorruimte $\mathbb{R}^{2n}$ met coördinaten $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$.

Als we een complexe inproduct-ruimte V zo tot een reële vectorruimte $V_{\mathbb{R}}$ maken, dan wordt deze een reële inproduct-ruimte met inproduct

$$\langle z, w \rangle_{\mathbb{R}} := \mathbf{Re}\, \langle z, w \rangle.$$

Ga na dat dit een reële inproduct-ruimte is. Met het standaard-inproduct op $\mathbb{C}^n$ krijgen we zo voor $z = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$ en $w = (u_1 + iv_1, \ldots, u_n + iv_n)$ dat

$$\langle z, w \rangle_{\mathbb{R}} = x_1 u_1 + y_1 v_1 + \cdots + x_n u_n + y_n v_n.$$

Als V een complexe inproduct-ruimte is en $z, w \in V \backslash \{0\}$, dan kunnen we de *hoek* $\alpha \in [0, \pi]$ tussen z en w definiëren door

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{Re}\, \langle z, w \rangle}{\|z\| \, \|w\|}\,. \tag{$*$}$$

Deze definitie is niet in alle opzichten bevredigend. Bijvoorbeeld in $\mathbb{C}^n$ met standaard-inproduct en met standaardbasis $e_1, \ldots, e_n$ zouden zo ie_1 en e_1 onderlinge hoek $\pi/2$ hebben, terwijl hun complexe inproduct gelijk aan i is, dus niet 0.
Een alternatieve definitie voor de *hoek* $\beta \in [0, \pi/2]$ tussen $z, w \in V \backslash \{0\}$ (V complexe inproduct-ruimte) is:

$$\cos \beta := \frac{|\langle z, w \rangle|}{\|z\| \, \|w\|} = \max_{\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)} \frac{\mathbf{Re}\, \langle e^{i\theta_1} z, e^{i\theta_2} w \rangle}{\|e^{i\theta_1} z\| \, \|e^{i\theta_2} w\|}\,. \tag{$**$}$$

We kunnen de hoek β in ($**$) ook zien als de minimale hoek α (in de zin van ($*$)) tussen twee vectoren ongelijk 0 in de complexe 1-dimensionale deelruimtes $\mathbb{C}z$ resp. $\mathbb{C}w$. Zo betekent het onderling loodrecht staan van $z, w \in V$ (d.w.z. $\langle z, w \rangle = 0$) dat elk tweetal vectoren ongelijk 0 genomen uit $\mathbb{C}z$ resp. $\mathbb{C}w$ onderlinge hoek $\pi/2$ heeft in de zin van ($*$).

De vectoren x en y in een ruimte met inproduct V heten *onderling loodrecht*, $x \perp y$ indien $\langle x, y \rangle = 0$. De nul-vector staat dus loodrecht op iedere vector. Voor $E \subset V$ bedoelen we met $x \perp E$ dat x loodrecht staat op ieder element van E; $E_1 \perp E_2$ betekent $x \perp y$ voor alle $x \in E_1$ en $y \in E_2$.

1.2. Stelling "Pythagoras". *Veronderstel dat x, y vectoren in een ruimte met inproduct zijn en dat $x \perp y$. Dan geldt*

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2.$$

Bewijs.

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

Precies zo bewijst men de *Parallellogram-identiteit*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Hier zijn x, y willekeurige elementen van een ruimte met inproduct.

1.3. Opmerking.

1. Het bewijs van "Pythagoras" is geen bewijs van de stelling van Pythagoras uit de Euclidische meetkunde (Waarom?).
2. In de Parallelogram-identiteit komen alleen normen voor. Men kan bewijzen dat, als deze identiteit geldig is in een genormeerde ruimte, dan de norm van een inwendig product afkomstig is. De omkering is handig: Als de Parallelogram-identiteit niet geldt, dan komt de norm niet van een inproduct.

3 Hierop sluit het begrip polarisatie aan: In een reële ruimte met inproduct hoeft men alleen de inproducten $\langle x, x\rangle$ te kennen:

$$2\langle x, y\rangle = \langle x+y, x+y\rangle - \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle.$$

Iets dergelijks geldt ook voor complexe ruimten met inproduct.

In ruimten met inproduct geldt de *belangrijke* ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.

1.4. Stelling (Cauchy-Schwarz). *In een ruimte V met inproduct geldt*

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|.$$

Bewijs. Neem $x, y \in V$. Dan is $\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \ge 0$, voor alle $\lambda \in \mathbb{K}$. We schrijven dit uit en substitueren $\lambda = t\langle x, y\rangle$, $t \in \mathbb{R}$. Het resultaat is een kwadratisch polynoom in t dat ≥ 0 moet zijn. De discriminant zal niet-positief zijn; herschrijven geeft het resultaat. □

1.5. Definitie. Een metrische ruimte heet *volledig* als iedere Cauchyrij in X een limiet heeft. Een volledige genormeerde vectorruimte heet een *Banachruimte*. Indien de norm afkomstig is van een inproduct spreekt men van een *Hilbertruimte*.

In topologie is bewezen dat voor iedere metrische ruimte X er een op isometrie na unieke volledige ruimte $\hat{X}$ bestaat zo dat X dicht ligt in $\hat{X}$. Dit is de *completering* van X.

Een gesloten lineaire deelruimte van een Banach- of Hilbertruimte is weer een Banach c.q. Hilbertruimte. Eindig-dimensionale deelruimten zijn gesloten, maar in het algemeen hoeven deelruimten **niet** gesloten te zijn.

Enige begrippen uit de theorie van metrische ruimten die we nodig zullen hebben: A heet *dicht* in B als $B = \bar{A}$, de afsluiting van A. $\mathbb{Q}$ is dicht in $\mathbb{R}$. Een ruimte V heet *separabel* als V een aftelbare dichte deelverzameling bezit. $\mathbb{R}^n$ is separabel. E heet *d-begrensd* in een metrische ruimte met metriek d als $E \subset B(a, r)$ voor zekere $a \in V$ en $r > 0$. Hier is $B(a, R) = \{x : d(a, x) < R\}$. Dit is niet zo'n handig begrip omdat iedere metriek equivalent is met een begrensde metriek. In metrische vectorruimten noemt men E begrensd als voor iedere $r > 0$ er een $N > 0$ is zo dat

$$E \subset NB(0, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{Nx :\ x \in B(0, r)\}.$$

Voor genormeerde ruimten komen begrensd en d-begrensd op hetzelfde neer.

K1.2. Opmerking Om een metrische vectorruimte te definiëren kunnen we het beste beginnen met een *topologische vectorruimte*: dit is een vectorruimte V die ook een topologische T_1-ruimte is (T_1 betekent dat elk punt een gesloten verzameling is) zo dat de afbeeldingen $(v, w) \to v + w: V \times V \to V$ en $(\lambda, v) \mapsto \lambda v: \mathbb{K} \times V \to V$ continu zijn. Zie veel meer hierover in Rudin [1]. Een deelverzameling E van een topologische vectorruimte V heet *begrensd* als er bij elke omgeving U van 0 in V een $s > 0$ is zo dat $E \subset tU$ voor alle $t > s$. Een *metrische vectorruimte* is een topologische vectorruimte voorzien van een metriek die compatibel is met de topologische structuur. Elke genormeerde vectorruimte is een metrische vectorruimte. Een voorbeeld van een metrische vectorruimte waarvan de metriek niet equivalent is met een metriek die van een norm afkomstig is, wordt gegeven in §3.5, onderdeel 8. Daar is de hele ruimte V in de gegeven metriek begrensd, maar V is niet begrensd volgens de hierboven gegeven definitie.

Een deelverzameling E van een metrische ruimte heet *compact* als iedere open overdekking van E een eindige deeloverdekking heeft; equivalent iedere rij in E heeft een convergente deelrij met limiet in E. Compacte (deelverzamelingen van) metrische ruimten zijn begrensd en separabel.

Het beeld van een compacte verzameling onder een continue functie is compact. Bekende gevolgen zijn

1. Een continue reëelwaardige functie op een compacte verzameling neemt een minimum en een maximum aan.
2. Afstanden tot compacte verzamelingen worden aangenomen, d.w.z. voor E compact, $x \in V$ is er een $u \in E$ zo dat
$$d(x, E) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y \in E} d(x, y) = d(x, u).$$
3. Iedere reële n-dimensionale vectorruimte is via een lineaire afbeelding equivalent met $\mathbb{R}^n$. Ieder tweetal normen $\|.\|$, $\|.\|'$ op $\mathbb{R}^n$ zijn equivalent, d.w.z. er bestaan $c, C > 0$ zo dat
$$c\|.\| \leq \|.\|' \leq C\|.\|.$$
4. Zij W een eindig-dimensionale deelruimte van een genormeerde ruimte V en x een element van V. Dan is er een u in W zo dat
$$d(x, W) = d(x, u).$$

Men bewijst 4 door op te merken dat de driehoeksongelijkheid geeft dat $d(x, W) = d(x, W \cap B(0, 2\|x\|))$. Omdat $W \cap B(0, 2\|x\|)$ compact is kunnen we 2 toepassen.

K1.3. Opmerking Tussen gevolgen 3 en 4 kan nog worden toegevoegd:

Elke eindig-dimensionale lineaire deelruimte van een genormeerde ruimte V is een gesloten deelverzameling van V.

In de volgende voorbeelden zal integratietheorie een rol spelen. Wij zullen ons steeds tot positieve *reguliere Borelmaten* beperken, dat wil zeggen dat de maatruimte $\mathcal{M}$ bestaat uit de Borelverzamelingen in een σ-compacte Hausdorffruimte en de maat $\mu \geq 0$ voldoet aan twee regulariteitseisen:
Uitwendige regulariteit: voor iedere $E \in \mathcal{M}$ geldt

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V,\ V \text{ open}\}$$

en inwendige regulariteit: voor iedere $E \in \mathcal{M}$ geldt

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ compact}\}.$$

Lebesguemaat en telmaat op $\mathbb{R}$ zijn voorbeelden.

1.6. Voorbeelden van Banach- en Hilbertruimten.

1. $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}^n$ met het gebruikelijke inproduct zijn Hilbertruimten.

2. $C[a,b]$ met norm $\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ is een Banachruimte. Deze norm heet de sup-norm of uniforme norm.

3. De ruimte l^p bestaat uit rijtjes $x = (x_1, x_2, \ldots)$ met de eigenschap dat

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Voor $p \geq 1$ is l^p met norm $\|x\|_p$ (de "l^p-norm") een Banachruimte. Zie topologie of bewijs dit zelf, eventueel door in Hoofdstuk 7 te kijken. Indien $p = 2$ komt de norm af van het inproduct

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j.$$

4. De ruimte l^∞ bestaat uit alle rijtjes $x = (x_1, x_2, \ldots)$ met de eigenschap dat

$$\|x\|_\infty = \sup_j \{|x|_j\} < \infty.$$

Ook l^∞ is een Banachruimte met $\|.\|_\infty$ als norm ("sup-norm"). Van enig belang is de deelruimte c_0 bestaande uit rijtjes die naar 0 convergeren ("nulrijtjes")

5. De ruimte $L^p(X, \mu)$ waar (X, μ) een maatruimte is. (De collectie meetbare verzamelingen wordt in de notatie onderdrukt). Deze bestaat uit (equivalentieklassen van) meetbare functies met de eigenschap dat

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty.$$

Hier heten twee functies equivalent als hun verschil μ bijna overal gelijk aan 0 is. De ruimten L^p met norm $\| \|_p$ ("p-norm") zijn Banachruimten voor $1 \le p < \infty$, $L^2(X, \mu)$ is een Hilbertruimte met inproduct

$$\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} \, d\mu.$$

In de syllabus integratietheorie vindt men de gevallen $p = 1$ en $p = 2$ behandeld. We komen op het algemene geval terug in hoofdstuk 7. Indien X een deel is van $\mathbb{R}^n$ en μ is Lebesguemaat, dan schrijven we $L^p(X)$ in plaats van $L^p(X, \mu)$.

6. De ruimte $L^\infty(X, \mu)$ bestaat uit (equivalentieklassen van) μ bijna overal begrensde functies met de essentieel-supremum-norm. Het is een Banachruimte. Zie de syllabus integratietheorie.

Als in het vervolg een van de bovenstaande ruimten wordt genoemd zonder dat duidelijk is welke norm bedoeld is, wordt de hier beschreven norm bedoeld. De volgende stelling van Weierstrass wordt in Fourieranalyse bewezen.

1.7. Stelling. *Iedere periodieke continue functie op $\mathbb{R}$ kan uniform benaderd worden met goniometrische polynomen met dezelfde periode. Iedere continue functie gedefinieerd op een compact deel K van $\mathbb{R}$ kan op K uniform benaderd worden met polynomen.*

De stelling impliceert dat de polynomen dicht liggen in $C([a, b])$. Het is nu eenvoudig in te zien dat de polynomen met coefficiënten in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ dicht liggen in $C([a, b])$. Dit zijn er aftelbaar veel. Conclusie:

1.8. Gevolg. $C([a, b])$ *is separabel.*

Wat is de relatie tussen de verschillende Banachruimten hierboven? We geven een paar voorbeelden

1.9. Voorbeeld. Als $f \in C([a, b])$ dan is $f \in L^2([a, b])$ en er is een $C > 0$ onafhankelijk van f met $\|f\|_2 \le C\|f\|$. Als $f \in L^2([a, b])$, dan $f \in L^1([a, b])$ en er is een $C > 0$ onafhankelijk van f met $\|f\|_1 \le C\|f\|_2$.

Inderdaad,

$$\|f\|_2^2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt \le (b - a)\|f\|^2$$

en

$$\|f\|_1^2 = \left(\int_a^b |f| \cdot 1 \, dt \right)^2 \le \int_a^b |f|^2 \, dt \int_a^b 1 \, dt = \|f\|_2^2 (b - a).$$

In de laatste formule is de ongelijkheid een typische toepassing van Cauchy-Schwarz.

1.10. Stelling. *De continue functies liggen dicht in* $L^2([a,b])$.

Bewijs. Eerst bewijzen we dat karakteristieke functies van meetbare verzamelingen in de L^2-afsluiting van $C([a,b])$ liggen: Zij $\varepsilon > 0$ en M meetbaar. De karakteristieke functie van een verzameling E geven we aan met χ_E, de Lebesguemaat met λ. Vanwege regulariteit is er een compacte verzameling K en een open V zo dat $K \subset M \subset V$ en $\lambda(V-K) < \varepsilon$. Urysohn's lemma geeft een continue f met $\chi_K \leq f \leq \chi_V$. Er volgt dat $\int |f - \chi_M|^2 \leq \varepsilon$. Ook liggen dan de trapfuncties in de L^2-afsluiting van $C([a,b])$. Nu liggen de trapfuncties dicht in $L^\infty([a,b])$ met de L^∞-norm, dus begrensde meetbare functies zijn zeker bevat in de L^2-afsluiting van $C([a,b])$. Tenslotte is iedere L^2-functie L^2-limiet voor $C \to \infty$ van de begrensde functies $f\chi_{E_C}$, waarbij χ_{E_C} de karakteristieke functie is van $E_C = \{x : |f(x)| \leq C\}$. □

Men kan $L^p([a,b])$ definiëren als de completering van de continue functies in L^p-norm.

1.11. Definities. Een (mogelijk overaftelbare) deelverzameling E van een vectorruimte V heet *(een) lineair onafhankelijk (stelsel)* als voor ieder $n \in \mathbb{N}$ en voor iedere keus $\lambda_j \in \mathbb{K}$ en $x_j \in E$ onderling verschillend geldt

$$\sum_1^n \lambda_j x_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0 \text{ voor alle } j.$$

Een deelverzameling E van een vectorruimte V heet *(een) opspannend (stelsel)* voor $A \subset V$ indien iedere $x \in A$ te schrijven is als

$$x = \sum_1^n \lambda_j x_j, \quad x_j \in E,\ \lambda_j \in \mathbb{K}.$$

We schrijven $A = \operatorname{Span} E$; A heet wel het opspansel van E. In een ruimte met inproduct noemen we E een *orthogonaal* stelsel indien de elementen van E onderling loodrecht zijn en niet gelijk zijn aan de nulvector. Het stelsel heet *orthonormaal* als bovendien alle vectoren in het stelsel norm 1 hebben. We noemen E een *algebraïsche basis* van V indien E een lineair onafhankelijk stelsel is dat V opspant. Zij nu V een Banachruimte. We noemen een *rij* $E \subset V$ een *Schauderbasis* als E de eigenschap heeft dat ieder element $x \in V$ op een unieke wijze te schrijven is als

$$x = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j x_j, \quad x_j \in E, \lambda_j \in \mathbb{K}.$$

K1.4. Opmerking Meer precies zeggen we dat een *Schauder-basis* van een Banachruimte V gegeven wordt door een rij $E = (x_j)_{j=1}^\infty$ in V zo dat er voor elke $x \in V$ unieke $\lambda_j \in \mathbb{K}$ $(j \in \mathbb{Z}_{>0})$ zijn met de eigenschap dat

$$x = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j x_j := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$$

(convergentie in de normtopologie). Het is dus voor een speciale volgorde van de termen in de oneindige reeks dat convergentie geldt. We spreken van *voorwaardelijke convergentie* van de reeks. Als de reeks naar een vast element uit V convergeert ongeacht de volgorde van de termen van de reeks, dan spreken we van *onvoorwaardelijke convergentie.* Als een Schauder-basis de eigenschap heeft dat voor elke $x \in V$ bovenstaande reeks onvoorwaardelijk convergeert, dan spreken we van een *onvoorwaardelijke Schauder-basis.* Een standaardreferentie voor Schauder-bases is:

J. Lindenstrauss & L. Tzafriri, *Classical Banach spaces, Vols. I and II*, Springer, 1977, 1979.

Je ziet direct in dat een Banach-ruimte die een Schauder-basis bezit, separabel is. Het omgekeerde blijkt niet waar te zijn, zie

P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math. 130 (1973), 309–317.

Een Schauder-basis voor $L^p([-\pi,\pi])$ $(1 < p < \infty)$ wordt gegeven door de volgende rij functies van x:

1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos(2x)$, $\sin(2x)$, ... ,

zie Vol. I, Chap. VII, Theorem (6.4) in

A. Zygmund, *Trigonometric series, Vols. I and II*, reprinting of the second edition of 1968, bound together, Cambridge University Press.

Echter, dit is geen Schauder-basis voor $L^p([-\pi,\pi])$ als $p = 1$ of ∞, zie opmerking en verwijzingen in Zygmund, Vol. I, Chap. VII net voor Theorem (6.14). Voor $p = \infty$ kunnen we reeds kijken naar de Banach-ruimte van 2π-periodieke continue functies t.o.v. de supnorm en inzien dat genoemde basis daar geen Schauder-basis is, zie Opgave 5.5.

Zij vervolgens H een Hilbertruimte. We noemen een (niet noodzakelijk aftelbaar) orthogonaal (resp orthonormaal) stelsel $E \subset V$ een *orthogonale (*resp. *orthonormale) basis* indien E de eigenschap heeft dat ieder element $x \in H$ op een unieke wijze te schrijven is als

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j, \quad x_j \in E, \lambda_j \in \mathbb{K}.$$

K1.5. Opmerking De gemakkelijkste definitie van *orthogonale* (resp. *orthonormale*) *basis* van een Hilbert-ruimte H is een orthogonaal (resp. orthonormaal) stelsel E in H zo dat $\operatorname{Span} E$ dicht ligt in H. Equivalent (iets preciezer dan hierboven) is het een orthogonaal (resp. orthonormaal) stelsel E in H zo dat er voor elke $x \in H$ een uniek aftelbaar deelsysteem $\{x_j\}_{j\in A}$ (A een aftelbare indexverzameling) van E is en unieke $\lambda_j \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ $(j \in A)$ zo dat $x = \sum_{j\in A} \lambda_j x_j$ met onvoorwaardelijke convergentie in H. Zie meer details na Stelling 2.12.

Er volgt dus dat elke aftelbare orthogonale (resp. orthonormale) basis van H een onvoorwaardelijke Schauder-basis van H is.

Behoorlijke separabele ruimten hebben een Schauderbasis. Hilbertruimten hebben een orthogonale basis, zie het volgende hoofdstuk waarin ook een aantal voorbeelden van orthogonale stelsel behandeld wordt.

We laten nu zien dat iedere vectorruimte een algebraïsche basis heeft. Dit gaat met het lemma van Zorn, dat in het college Verzamelingenleer behandeld wordt.

1.12. Lemma van Zorn. *Veronderstel dat X een partieel geordende verzameling is zo dat iedere keten een bovengrens in X heeft. Dan heeft X een maximaal element.*

Omdat het Lemma van Zorn later nog een keer terugkomt, geven we een kleine toelichting. Een partiële ordening $\leq$ op X is een relatie op X die voldoet aan (i) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$, (ii) $x \leq x$ voor iedere $x \in X$ en (iii) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$. De ordening heet lineair als verder (iv) $\forall x \neq y \in X : x \leq y$ of $y \leq x$ (exclusief!). Een keten K in X is een deelverzameling van X die door $\leq$ lineair wordt geordend. Een bovengrens voor K is een $x \in X$ zo dat voor alle $y \in K$ geldt $y \leq x$. Een element $x \in X$ heet maximaal als voor iedere $y \in X$ geldt $x \leq y \Rightarrow y = x$: "Er is geen groter element dan x". Tenslotte brengen we in herinnering dat Zorn equivalent is met het keuzeaxioma en dus als axioma kan worden genomen.

1.13. Stelling. *Iedere vectorruimte V heeft een algebraïsche basis.*

Bewijs. Zij $\mathcal{F}$ de collectie lineair onafhankelijke stelsels in V. Orden deze door inclusie, dat wil zeggen, $M_1 \leq M_2 \iff M_1 \subset M_2$. Dit geeft een partiële ordening. Een keten $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ heeft een bovengrens $M = \cup_{\alpha \in A} M_\alpha$. Deze M is een lineair onafhankelijk stelsel dat alle M_α bevat: een afhankelijkheid tussen eindig veel elementen van M zou al bestaan in zekere M_α. Er is dus een maximaal element, zeg E en dit is een basis: E is immers lineair onafhankelijk en als x niet op E zou zijn uit te schrijven is $E \cup \{x\}$ een groter lineair onafhankelijk stelsel. □

1.14. Opgaven.

1.1 Onderzoek wanneer gelijkheid kan gelden in de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.

1.2 Bewijs dat als V een ruimte met inproduct $\langle\ ,\ \rangle$ is, dan is $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ een norm.

1.3 Bewijs de parallellogram-identiteit.

1.4 Laat zien dat er geen inproduct bestaat op $C([0,1])$ dat de sup-norm induceert. Idem voor $L^1((0,1))$ en de L^1-norm.

1.5 Welke van de hieronder beschreven functies definieert een inproduct op de ruimte van reëelwaardige, 2 keer continu differentieerbare functies $C^2([0,1])$?

a. $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$
b. $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt + f(0)g(0)$
c. $\langle f, g\rangle = \int_0^1 (f'(t)g(t) + g'(t)f(t))\,dt$
d. $\langle f, g\rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t) + f''(t)g''(t))\,dt$.

Welke van deze inprodukten maakt van $C^2([0,1])$ een Hilbertruimte?

1.6 Welke van de hieronder beschreven functies definieert een norm op $C^2([0,1])$?

a. $\|f\| = \max_t\{|f(t) + f'(t)|\}$
b. $\|f\| = |f(0)| + \int |f'(t)|\, dt$
c. $\|f\| = |f(0)| + \int |f''(t)|\, dt$
d. $\|f\| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^j} |f(k/j)|$
e. $\|f\| = \max_t\{|f(t)| + |f''(t)|\}$.

Welke van deze normen maakt van $C^2([0,1])$ een Banachruimte?

1.7 Bewijs dat een gesloten lineaire deelruimte van een Banachruimte weer een Banachruimte is door de norm te beperken. Geef een voorbeeld van een deelruimte van $C([0,1])$ die niet gesloten is.

1.8 Laat zien dat als μ een maat op X en $\mu(X) < \infty$ is, dan geldt $L^2(X,\mu) \subset L^1(X,\mu)$.

1.9 Laat zien dat de ruimten $L^p([a,b])$ separabel zijn voor $1 \leq p < \infty$. Geef een dicht liggende deelverzameling aan.

1.10 Bewijs dat l^∞ niet separabel is. Idem voor $L^\infty([a,b])$, hoe zit het met c_0?

1.11 Geef een Schauderbasis aan voor l^p, $1 \leq p < \infty$.

1.12 Bewijs het gestelde in opmerking 1.3.2 voor reële genormeerde ruimten. Definieer een inproduct met behulp van polarisatie, zie opmerking 1.3.3. (Dit is veel werk, zie bijv. M. M. Day, Normed linear spaces.)

2. Hilbertruimten.

We zullen in dit hoofdstuk zien dat afstanden zich in een Hilbertruimte goed gedragen: Als in lineaire algebra is er verband tussen afstanden tot een gesloten deelruimte en orthogonale projecties. We tonen het bestaan van orthogonale bases aan. Uitschrijven van elementen op een basis leidt tot formeel dezelfde resultaten als in Lineaire algebra: De belangrijke Parsevalgelijkheid en de Besselongelijkheid worden bewezen. We laten zien dat het uit de lineaire algebra bekende Gram-Schmidt proces ook werkt in Hilbertruimten.

In dit hoofdstuk zal H steeds een Hilbertruimte zijn. Een deelverzameling E van een vectorruimte heet convex als $x, y \in E$ impliceert dat $tx+(1-t)y \in E$ voor iedere $0 \leq t \leq 1$.

2.1. Stelling. *Laat X een gesloten convexe deelverzameling zijn van een Hilbertruimte H en $y \in H$. Dan is er precies een punt $x \in X$ zo dat $d(y, X) = d(y, x)$.*

Bewijs. Neem een rij $\{x_n\} \subset X$ met $d(y, x_n) \to d(y, X)$. We laten zien dat de rij $\{x_n\}$ een Cauchyrij is. Neem $\epsilon > 0$. De parallellogram-identiteit geeft (met "x"$= x_n - y$, "y"$= x_m - y$

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\left(\|x_n - y\|^2 + \|x_m - y\|^2\right) - 4\,\|\tfrac{1}{2}(x_n + x_m) - y\|^2. \tag{2.1}$$

Omdat X convex is, is $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in X$ dus

$$\|\tfrac{1}{2}(x_n + x_m) - y\| \geq d(y, X).$$

Verder zal voor zekere n_0

$$\|x_n - y\| < d(y, X) + \epsilon, \quad n > n_0.$$

Nu volgt uit (2.1) dat $\|x_n - x_m\| < 2\epsilon$ als $n, m > n_0$. De rij $\{x_n\}$ heeft dus een limiet x. Vanwege continuïteit zal $d(y, x) = d(y, X)$. Ook is x uniek: als x' ook zou voldoen, dan was de rij $x, x', x, x', \ldots$ Cauchy volgens (2.1). Tenslotte is $x \in X$ omdat X gesloten is. □

K2.1. Opmerking Het bewijs blijft geldig als slechts wordt aangenomen dat H een inproductruimte is en dat X een volledige en convexe deelverzameling is. Uniciteit van het punt x volgt reeds zonder aanname van volledigheid van X.

2.2. Stelling. *Zij X een gesloten lineaire deelruimte van H en $y \in H$. Dan is er precies één $x \in X$ met $d(y, x) = d(y, X)$. Bovendien geldt $y - x \perp X$. Als $y - x \perp X$ voor zekere $x \in X$ dan geldt ook $d(y, X) = d(y, x)$; bij iedere y is er precies één zo'n x.*

Bewijs. De eerste uitspraak volgt uit Stelling 2.1. We moeten laten zien dat $y - x \perp X$. Voor iedere $z \in X$ en $\lambda \in \mathbb{K}$ geldt

$$\|y - x + \lambda z\|^2 = \|y - x\|^2 + 2\mathbf{Re}\left(\lambda\langle z, y - x\rangle\right) + |\lambda|^2\|z\|^2 \geq \|y - x\|^2.$$

Er volgt dat

$$2\mathbf{Re}\left(\lambda\langle z, y - x\rangle\right) + |\lambda|^2\|z\|^2 \geq 0$$

voor alle λ, dus $\langle z, y - x\rangle = 0$.

Als $y - x \perp X$ voor zekere $x \in X$, dan is voor iedere $z \in X$ $y - x \perp x - z$ en geeft Pythagoras

$$\|y - z\|^2 = \|y - x + x - z\|^2 = \|y - x\|^2 + \|x - z\|^2 \geq \|y - x\|^2$$

dus $d(y, X) = d(y, x)$. Uniciteit volgt uit de eerste bewering van de stelling. $\square$

K2.2. Opmerking Een resultaat onder zwakkere aannamen, dat in feite hier ook bewezen wordt, is:
Zij X een lineaire deelruimte van een inproductruimte H. Zij $y \in H$, $x \in X$. Dan geldt: $d(y, X) = d(y, x)$ desda $y - x \perp X$. Als $x \in X$ aan de twee equivalente eigenschappen voldoet, dan is x uniek. Als X bovendien gesloten is in H dan bestaat er een (unieke) $x \in X$ die aan de twee equivalente eigenschappen voldoet.

2.3. Definitie. Zij X een gesloten deelruimte van H. De afbeelding

$$P : H \to X, \quad y \mapsto x, \quad \text{met } y - x \perp X \text{ of equivalent } d(y, x) = d(y, X)$$

heet de *orthogonale projectie* op X. Het *orthoplement* $X^\perp$ van X is de collectie $\{z \in H : z \perp X\}$

Merk op dat het orthoplement van een deelruimte een gesloten deelruimte is. Stelling 2.2 geeft dat P goed gedefinieerd is.

K2.3. Opmerking De definitie van het orthoplement $X^\perp$ van X blijft geldig als $X \subset H$ (dus X niet noodzakelijk een lineaire deelruimte van H). Ook dan is $X^\perp$ een gesloten lineaire deelruimte van H. Verder is dan $(X^\perp)^\perp$ een gesloten lineaire deelruimte van H en $X \subset (X^\perp)^\perp$. Tenslotte geldt: $X = (X^\perp)^\perp$ desda X een gesloten lineaire deelruimte is van H.

We herformuleren Definitie 2.3 in termen van orthogonale projecties.

2.4. Stelling. *Zij X een gesloten deelruimten van H. Dan bestaat er precies één orthogonale projectie*

$$P_X : H \to X, \quad y \mapsto x, \quad \text{met } y - x \perp X$$

P_X voldoet aan $P_X \circ P_X = P_X$ en is lineair, dat wil zeggen,

$$P_X(f + cg) = P_X f + cP_X g, \quad f, g \in H,\ c \in \mathbb{K}.$$

Bewijs. We hoeven alleen de lineariteit te bewijzen, de rest volgt uit Stelling 2.2. Merk op dat uit Stelling 2.2 ook volgt

$$P_X(f + cg) - P_X f - cP_X g = (P_X(f + cg) - (f + cg)) - (P_X f - f) - (cP_X g - cg) \in X \cap X^\perp.$$

Deze uitdrukking is dus 0 hetgeen de lineariteit bewijst. $\square$

2.5. Gevolg. *Zij X een gesloten deelruimte van H dan geldt*

$$H = X \oplus X^\perp,$$

dat wil zeggen, iedere $h \in H$ is op precies een manier te schrijven als $h = x + y$, $x \in X$, $y \in X^\perp$.

Bewijs. Zij P de projectie op X. Schrijf $h = Ph + (h - Ph)$. Dit is de gevraagde ontbinding. Als $h = x + y$, $x \in X$, $y \in X^\perp$, dan $X \ni (x - Ph) = (h - Ph) - y \in X^\perp$, dus $x - Ph$ staat loodrecht op zichzelf en is 0. □

K2.4. Opmerking Zij H een Hilbert-ruimte. Dan betekent $H = X \oplus Y$ (in woorden "H is de orthogonale directe som van X en Y") het volgende:

(a) X en Y zijn gesloten lineaire deelruimtes van H;

(b) $X \perp Y$;

(c) Voor alle $x \in H$ zijn er een unieke $x \in X$ en $y \in Y$ zo dat $z = x + y$.

Voorwaarde (c) is equivalent met:

(c′) $X \cap Y = \{0\}$ en $X + Y = H$.

2.6. We zullen nu orthogonale stelsels en orthogonale bases bestuderen, zie Definitie 1.11. Eerst enkele voorbeelden.

2.7. Voorbeelden van orthogonale stelsels.

1. Voor iedere $t \in [0, 2\pi)$ de twee vectoren $\{(\cos t, \sin t), (-\sin t, \cos t)\}$ in $\mathbb{R}^2$;
2. $E = \{1, x, x^2 - 1/3, x^3 - 3x/5\}$ in $L^2([-1, 1])$
3. $E = \{e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$ in $L^2([-\pi, \pi])$.
4. $E = \{\cos nx,\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ in $L^2([0, \pi])$.

Het opspansel van een oneindig stelsel vectoren is in het algemeen niet gesloten. Daarom speelt de afsluiting $\overline{\operatorname{Span} E}$ vaak een rol.

2.8. Lemma. *Zij E een (orthogonaal) stelsel in V. Dan is $x \perp E$ dan en slechts dan als $x \perp \overline{\operatorname{Span} E}$.*

Bewijs. Als $x \perp E$ dan geeft de lineariteit van het inproduct dat $x \perp \operatorname{Span} E$; continuïteit van het inproduct impliceert nu $x \perp \overline{\operatorname{Span} E}$. □

2.9. Definitie. Zij $E = \{e_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ een orthogonaal stelsel in een ruimte met inproduct V. De *ontwikkeling* van $f \in V$ ten opzichte van E is de *formele som*

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} c_\alpha[f] e_\alpha \tag{2.2}$$

met

$$c_\alpha[f] = \frac{\langle f, e_\alpha \rangle}{\langle e_\alpha, e_\alpha \rangle}.$$

Op dit moment heeft (2.2) alleen betekenis als element van V voor eindige stelsels. Voor oneindige stelsels is niet duidelijk of de reeks convergeert, en (voor overaftelbare) stelsels, hoe men de som zou moeten opvatten. De coëfficiënten $c_\alpha[f]$ worden ook wel de *Fouriercoëfficiënten* van f genoemd.

De loodrechte projectie op $\operatorname{Span} E$ in het geval van een eindig stelsel in een inproductruimte, en op de afsluiting van $\operatorname{Span} E$ in het geval van een Hilbertruimte, noteren we met P_E.

2.10. Lemma. *Zij* $E = \{e_j : 1 \le j \le n\}$ *een eindig orthogonaal stelsel in* V *en zij* $f \in V$*. Dan is* $P_E f = \sum_1^n c_j[f]e_j$*. Er geldt*

$$\sum_1^n |c_j[f]|^2 \|e_j\|^2 = \|P_E f\|^2 = \|f\|^2 - \|f - P_E f\|^2 \le \|f\|^2.$$

Bewijs. We laten zien $f - \sum_1^n c_j[f]e_j \perp \operatorname{Span} E$. Inderdaad,

$$\langle f - \sum_1^n c_j[f]e_j, e_k\rangle = \langle f, e_k\rangle - \sum_1^n c_j[f]\langle e_j, e_k\rangle = 0$$

wegens orthogonaliteit en de definitie van $c_j[f]$. Uit Lemma 2.8 en Stelling 2.4 volgt nu dat $\sum_1^n c_j[f]e_j = P_E f$. Vervolgens vinden we weer met orthogonaliteit en de lineariteit van het inproduct

$$\langle \sum_1^n c_j[f]e_j, \sum_1^n c_k[f]e_k\rangle = \sum_{j,k} c_j[f]\overline{c_k[f]}\langle e_j, e_k\rangle = \sum_1^n |c_j[f]|^2 \|e_j\|^2.$$

De laatste gelijkheid in het Lemma is "Pythagoras". □

Voor een *orthonormaal* stelsel $\{e_j\}$ krijgt men de eenvoudiger formule

$$\|P_E f\|^2 = \sum_1^n |c_j[f]|^2.$$

Met een orthogonaal stelsel $\{e_\alpha\}$ kan met het orthonormale stelsel $\{\tilde{e}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} e_\alpha/\|e_\alpha\|\}$ associëren, dat hetzelfde opspansel heeft, (wat ook geldt voor deelstelsels) en de formules iets vereenvoudigt.

2.11. Lemma. *Zij* $f \in V$ *en* $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *een orthogonaal stelsel. Dan is* $c_\alpha[f] \ne 0$ *voor hoogstens aftelbaar veel* α*.*

Bewijs. We mogen wel aannemen dat het stelsel orthonormaal is en dat $\|f\| = 1$. Zij nu $n \in \mathbb{N}$. Het aantal (de kardinaliteit)

$$\sharp\{\alpha \in \mathcal{A} : \ |c_\alpha[f]| > 1/n\} \le n^2.$$

Immers, een eindig deelstelsels $E_n = \{e_j\}$, bestaande uit tenminste $n^2 + 1$ elementen, met de eigenschap dat $|c_j[f]| > 1/n$, leidt tot

$$1 = \|f\|^2 \ge \|P_{E_n} f\|^2 \ge \sum_1^{n^2+1} |c_j[f]|^2 \ge \frac{n^2+1}{n^2} > 1,$$

een tegenspraak.

Nu is

$$\{\alpha \in \mathcal{A} : \ c_\alpha[f] \ne 0\} = \cup_{n \in \mathbb{N}}\{\alpha \in \mathcal{A} : \ |c_\alpha[f]| > 1/n\}$$

een aftelbare vereniging van eindige verzamelingen, dus aftelbaar. □

De formele ontwikkeling (2.2) ($\sum c_\alpha[f]e_\alpha$) heeft slechts aftelbaar veel termen ongelijk aan 0. Door de termen gelijk aan 0 te verwijderen kan deze worden opgevat als al of niet convergente reeks van aftelbaar veel termen dus, als (mogelijke) limiet van een rij in V. Dit zullen we vanaf nu doen. De reeks blijkt altijd te convergeren.

2.12. Stelling. *Zij $E = \{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ een eindig of oneindig orthogonaal stelsel in een Hilbertruimte H en zij $f \in H$ met formele ontwikkeling $\sum c_\alpha e_\alpha$. Dan geldt*

a. *De reeks $\sum c_\alpha e_\alpha$ convergeert onvoorwaardelijk, dat is bij iedere volgorde van sommatie, naar een element van H;*

b. *$\sum c_\alpha e_\alpha = P_E f$;*

c. *$\sum |c_\alpha|^2 \|e_\alpha\|^2 = \|P_E f\|^2 \le \|f\|^2$; dit staat bekend als de Besselongelijkheid;*

d. *$\sum c_\alpha e_\alpha = f \iff f \in \overline{\operatorname{Span} E}$. In dit geval geldt de Parsevalgelijkheid: $\|f\|^2 = \sum |c_\alpha|^2 \|e_\alpha\|^2$.*

e. *Voor een rijtje $c_n \in \mathbb{K}$ convergeert $\sum c_n e_{\alpha_n}$ naar een element van $\overline{\operatorname{Span} E}$ dan en slechts dan als $\sum |c_n|^2 \|e_n\|^2$ convergeert.*

Bewijs. We mogen wel weer aannemen dat het stelsel E orthonormaal is. Uit het vorige Lemma volgt dat hoogstens aftelbaar veel van de c_α ongelijk 0 zijn. Noem deze c_j en e_j de bijbehorende vectoren in E. Zij $E_n = \{e_1, \dots e_n\}$. We bewijzen eerst dat $\sum |c_j|^2$ convergeert. Vanwege Lemma 2.10 is $P_{E_n} f = \sum_{j=1}^n c_j e_j$ en

$$\sum_{j=1}^n |c_j|^2 = \|P_{E_n} f\|^2 \le \|f\|^2.$$

Dit is onafhankelijk van n dus convergeert $\sum_{j=1}^\infty |c_j|^2$ met som $\le \|f\|^2$.

Voor (a) laten we zien dat de $\sum c_j e_j$ een Cauchyreeks is. Zij $\varepsilon > 0$. Er geldt

$$\|\sum_{j=k}^l c_j e_j\|^2 = \sum_{i,j=k}^l c_i \bar{c}_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{j=k}^l |c_j|^2 < \varepsilon, \tag{2.3}$$

als $k, l > k_0(\varepsilon)$ vanwege convergentie van $\sum_{j=1}^\infty |c_j|^2$. Merk op dat de convergentie onafhankelijk is van de sommatievolgorde, omdat de reeks $\sum_{j=1}^\infty |c_j|^2$ onafhankelijk van sommatievolgorde convergeert.

(b) Zij nu $g = \sum c_j e_j (= \lim_{l\to\infty} P_{E_l} f)$. We laten zien dat $g = P_E f$. Voor iedere α is

$$\langle g - f, e_\alpha\rangle = \lim_{l\to\infty} \sum_1^l \langle c_j e_j, e_\alpha\rangle - \langle f, e_\alpha\rangle = 0.$$

Dus wegens Lemma 2.8 is $g - f \perp \overline{\operatorname{Span} E}$, verder is $g \in \overline{\operatorname{Span} E}$ als limiet van vectoren uit $\operatorname{Span} E$, zodat vanwege Stelling 2.4 $g = P_E f$.

(c) Omdat $P_E f = \lim_{l\to\infty} P_{E_l} f$, is $\|P_E f\|^2 = \lim_{l\to\infty} \|P_{E_l} f\|^2 = \sum_{j=1}^\infty |c_j|^2$. De ongelijkheid volgt weer uit "Pythagoras".

(d) Uit (b) volgt dat (d) equivalent is met

$$f = P_E f \iff f \in \overline{\operatorname{Span} E}.$$

Dit laatste volgt uit Stelling 2.4. De Parseval relatie volgt onmiddellijk uit (c).

(e) Convergentie van $\sum |c_n|^2$ is equivalent met $\sum c_n e_{\alpha_n}$ is Cauchy, volgens (2.3). □

2.13. Gevolg. *Een orthogonaal stelsel E in een Hilbertruimte H is een orthogonale basis, (cf. Definitie 1.11), dan en slechts dan als $\overline{\operatorname{Span} E} = H$.*

Bewijs. Als E een orthogonale basis is, is E een orthogonaal stelsel en ieder element $f \in H$ te schrijven als $\sum_1^\infty c_n e_n$, dus limiet van elementen van $\operatorname{Span} E$, dus is $\overline{\operatorname{Span} E} = H$. Zij omgekeerd E een orthonormaal stelsel met $\overline{\operatorname{Span} E} = H$. Dan volgt uit Stelling 2.12 (d) dat voor ieder $f \in H$ geldt $f = \sum c_n[f] e_n$. Bovendien is deze representatie uniek: als $f = \sum d_n e_n$, dan is $d_n \|e_n\|^2 = \langle f, e_n \rangle = c_n[f] \|e_n\|^2$, vanwege orthogonaliteit.

2.14. Definitie. Een orthogonaal stelsel heet *maximaal* in een inproductruimte V als $x \in V$ en $x \perp E$ impliceert $x = 0$.

Met andere woorden, men kan E niet tot een groter orthogonaal stelsel uitbreiden.

2.15. Stelling. *In een Hilbertruimte H zijn equivalent: (i) E is een maximaal orthogonaal stelsel, (ii) E is een orthogonale basis.*

Bewijs. (i)⇒(ii). Zij $f \in H$. Er geldt $(f - P_E f) \perp \overline{\operatorname{Span} E}$ dus wegens maximaliteit geldt voor alle $f \in H$ dat $f = P_E f$. Uit Stelling 2.12 (d) en Gevolg 2.13 volgt dat E een basis is.

(ii)⇒(i). Veronderstel dat $x \in H$ en $x \perp E$. Omdat E een basis is, is $x \in \overline{\operatorname{Span} E}$, dus $x \perp x$ en dus $x = 0$. □

2.16. Stelling (Existentie van bases). *Ieder orthogonaal stelsel in een Hilbertruimte H kan worden aangevuld tot een maximaal stelsel, dus tot een basis.*

Bewijs. Zij E een orthogonaal stelsel in H. Beschouw de orthogonale stelsels in H die E bevatten, en orden deze door inclusie. Dit geeft een partiële ordening. Om het Lemma van Zorn toe te passen, merken we op dat iedere keten $\{E_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ een bovengrens heeft, nl., $\cup_{\alpha \in \mathcal{A}} E_\alpha$. Dit is inderdaad een orthogonaal stelsel en bevat E (ga na). Er is dus een maximaal element, E' een orthogonaal stelsel dat E omvat en niet bevat is in een groter stelsel. Dat wil zeggen er is geen $f \neq 0$ in V zo dat $f \perp E'$. □

2.17. Stelling. *Voor een Hilbertruimte H zijn equivalent*

i. H is separabel.
ii. Iedere orthogonale basis van H heeft ten hoogste aftelbaar veel elementen.
iii. H heeft een orthogonale basis bestaande uit ten hoogste aftelbaar veel elementen.

Bewijs. Zonder verlies van algemeenheid mogen we weer met orthonormale bases werken.

(i)⇒(ii). Zij B een orthonormale basis van H. De afstand tussen twee basisvectoren is dan $\sqrt{2}$. De open ballen $B(e_\alpha, \sqrt{2}/2)$ om de basisvectoren e_α met straal $\sqrt{2}/2$ zijn dus disjunct. Zij nu $A \subset H$ een aftelbare dichte deelverzameling. In iedere bal kiezen we een element van A. Dit geeft een injectie van B naar A, dus B is ten hoogste aftelbaar.

(ii)⇒(iii). Triviaal.

(iii)⇒(i). Laat $\mathbf{Q}$ een aftelbare dichte deelverzameling van $\mathbb{K}$ zijn. Kies

$$A = \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j e_j : \ n \in \mathbb{N}, \ q_j \in \mathbf{Q}, \ e_n \in B \right\},$$

waarbij B een aftelbare orthogonale basis van V is. De verzameling A is aftelbaar. We laten zien dat A dicht ligt. Neem $f \in H$ en $\varepsilon > 0$. We weten dat $\sum_j c_j[f]e_j$ naar f convergeert. Er is een n_0 zó dat $\|f - \sum_j^{n_0} c_j[f]e_j\| < \varepsilon$. Verder zijn er nu $q_j \in \mathbf{Q}$ zó dat $\|\sum_j^{n_0} c_j[f]e_j - \sum_j^{n_0} q_j e_j\|^2 = \sum_j^{n_0} \|c_j[f] - q_j\|^2 < \varepsilon$. De driehoeksongelijkheid voltooit het bewijs. □

2.18. Definitie. Een *isometrie* tussen twee Hilbertruimten H_1 en H_2 is een surjectieve lineaire afbeelding $F : H_1 \mapsto H_2$ met de eigenschap dat voor alle $f, g \in H_1$ geldt $\langle f, g\rangle = \langle Ff, Fg\rangle$

We zeggen wel H_1 is isometrisch isomorf met H_2. Zie ook opgave 2.13.

2.19. Gevolg. *Een separabele Hilbertruimte H is òf eindig dimensionaal en (dus) voor zekere n isometrisch isomorf met $\mathbb{R}^n$ of $\mathbb{C}^n$, òf isometrisch isomorf met $l^2(\mathbb{N})$.*

Bewijs. Uit lineaire algebra weten we dat iedere eindig-dimensionale Hilbertruimte isomorf is met $\mathbb{R}^n$ of $\mathbb{C}^n$. Neem nu aan dat H een niet eindige aftelbare orthonormale basis $\{e_n\}$ bezit. De afbeelding

$$F: \ l^2(\mathbb{N}) \to H, \quad (c_1, c_2, \ldots) \mapsto \sum_j c_j e_j$$

is surjectief en welgedefinieerd wegens Stelling 2.12. Verder is F een isometrie. Met $f = (c_1, c_2, \ldots)$, $g = (d_1, d_2, \ldots)$ is wegens continuïteit en lineariteit van het inproduct

$$\langle Ff, Fg\rangle = \langle \sum_j c_j e_j, Fg\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \sum_1^n c_j e_j, Fg\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n c_j \bar{d}_j = \langle f, g\rangle.$$

□

2.20. Voorbeeld. Een orthogonaal stelsel in de belangrijke Hilbertruimte $L^2([-\pi, \pi])$ is $E = \{e^{int} : \ n \in \mathbb{Z}\}$. Uit Stelling 1.7 en 1.10 volgt eenvoudig dat $\operatorname{Span} E$ dicht ligt in in $L^2([-\pi.\pi])$. Dit stelsel vormt dus een orthogonale basis. Hieruit kan men eenvoudig andere bases voor L^2-ruimten vinden, vgl. opgave 2.5.

Volgens Stelling 1.7 liggen de polynomen dicht in de continue functies op $[-1, 1]$ en dus ook (in de L^2-topologie) in $L^2([-1, 1])$. We vinden dus dat het opspansel van de monomen dicht ligt in $L^2([-1, 1])$. Het is echter geen orthogonaal stelsel. Het uit de lineaire algebra bekende Gram-Schmidt proces kan ook op een oneindige rij vectoren worden toegepast en geeft dan een orthonormale rij met dezelfde opspansels.

2.21. Gram-Schmidt Proces. *Zij $G = \{g_j\}$ een rij vectoren in een inproductruimte V. Er bestaat een orthonormaal stelsel $E = \{e_j\}$ met de eigenschap dat* $\operatorname{Span} G = \operatorname{Span} E$. *Meer precies worden de e_n zo geconstrueerd dat* $\operatorname{Span}\{g_1, \ldots, g_n\} = \operatorname{Span}\{e_1, \ldots, e_{j_n}\}$.

Constructie. Zij g_k het eerste element ongelijk 0 van G. Definieer $j_k = 1$, $e_1 = g_k/\|g_k\|$. Veronderstel nu dat $e_1, \ldots, e_{j_n}$ gekozen zijn met de eigenschap dat $\operatorname{Span}\{g_1, \ldots, g_n\} = \operatorname{Span}\{e_1, \ldots, e_{j_n}\} = E_n$. Indien nu g_{n+1} afhankelijk is van $\{g_1, \ldots, g_n\}$ zetten we $j_{n+1} =$

j_n en verandert er niets in ons stel orthonormale vectoren. Als dit niet het geval is zetten we $j_{n+1} = j_n + 1$ en definiëren we

$$e_{n+1} = \frac{g_{n+1} - P_{E_n} g_{n+1}}{\|g_{n+1} - P_{E_n} g_{n+1}\|}.$$

Omdat $g_{n+1} \notin \operatorname{Span} E_n$ is het rechterlid goed gedefinieerd. Het is duidelijk dat $e_{n+1} \perp E_n$. Verder is duidelijk dat $\|e_{n+1}\| = 1$. Tenslotte is $\operatorname{Span}\{g_1, \dots g_{n+1}\} = \operatorname{Span} E_n \cup \{e_{n+1}\}$. Immers $\operatorname{Span}\{g_1, \dots g_n\} = \operatorname{Span} E_n$ en $g_{n+1} = \|g_{n+1} - P_{E_n} g_{n+1}\| \, e_{n+1} + P_{E_n} g_{n+1}$. □

Voorbeeld 2.7.2 is verkregen door het Gram-Schmidt proces toe te passen op de polynomen $1, x, x^2, x^3$, echter zonder op norm 1 te normaliseren. In plaats daarvan zijn de polynomen monisch gehouden. Het orthonormale stelsel dat men krijgt door uit te gaan van

$$1, x, x^2, x^3, \dots$$

is een orthonormale basis van $L^2([-1, 1])$. Soms worden deze genormaliseerd, zodat ze in 1 de waarde 1 hebben. De zo verkregen polynomen heten de **Legendre-polynomen** en hebben fraaie eigenschappen, zie opgave 14 en verder.

2.22. Opgaven.

2.1 Op $\mathbb{R}^2$ leggen we een norm door $\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Laat $I = [-1, 1] \times \{1\}$ en $y = (1/2, 1/2)$. Bereken $d(I, y)$ en laat zien dat I compact en convex is, terwijl er verschillende $x \in I$ zijn waarvoor de afstand wordt aangenomen.

2.2 Zij L de deelruimte van $C([0, 1])$ bestaande uit functies f van de vorm $f(t) = at$. Bereken $d(1, L)$ en laat zien dat de afstand wordt aangenomen voor verschillende $f \in L$.

2.3 Zij X de deelruimte van $C([0, 1])$ bestaande uit functies die 0 zijn in 1. Laat zien dat X (met uniforme norm) een Banachruimte is. Zij nu L de lineaire deelruimte van X bestaande uit functies $f \in X$ waarvoor $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$. Bewijs dat L gesloten is. Bereken de afstand van de functie $f(t) = 1 - t$ tot L en laat zien dat deze **niet** wordt aangenomen, d.w.z. er bestaat geen $g \in L$ met $d(g, f) = d(L, f)$.

2.4 Laat zien dat de even functies ($f(t) = f(-t)$) een gesloten deelruimte vormen van $L^2([-1, 1])$. Beschrijf het orthoplement.

2.5 Onderzoek welke van de volgende stelsels een orthogonale basis vormen in de genoemde ruimten:

1. $\{\cos nx, \sin mx : n = 0, 1, \dots; m = 1, 2, \dots\}$ in $L^2([-\pi, \pi])$.
2. $\{\sin mx : \ m = 1, 2, \dots\}$ in $L^2([0, \pi])$.
3. $\{\cos mx : \ m = 1, 2, \dots\}$ in $L^2([0, \pi])$.
4. $\{\sin x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 4x, \dots\}$ in $L^2([-\pi/2, \pi/2])$.
5. $\{\sin x, \sin 3x, \sin 5x, \dots\}$ in $L^2([0, \pi/2])$.

2.6 Bepaal de ontwikkeling van e^{ax} ($a \in \mathbb{R}$) t.o.v. het stelsel $\{e^{inx}\}$ in $L^2([-\pi, \pi])$. Pas vervolgens de Parsevalgelijkheid toe.

2.7 Idem voor de functie 1 ten opzichte van het stelsel $\{\sin nx\}$ in $L^2([0,\pi])$. Wat geeft Parseval hier?

2.8 Voor welke $s \in \mathbb{R}$ stelt $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos jt}{j^s}$ een element van $L^2([-\pi,\pi])$ voor?

2.9 Zij H de ruimte van continue functies op $\mathbb{R}$, bestaande uit eindige sommen

$$f(t) = \sum_1^n c_j e^{i\lambda_j t}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R},\ c_j \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$$

Leg op H een inproduct door

$$\langle f, g\rangle = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\overline{g(t)}\ dt.$$

Laat zien dat de functies e^{iat}, $a \in \mathbb{R}$ een orthogonaal stelsel vormen. Is (de completering van) H separabel?

2.10 Orthogonaliseer de rij $1, x, x^2, x^3, x^4$ in $L^2([-1,1])$.

2.11 Bepaal het polynoom P van graad 4 dat de functie $|x|$ het best benadert in $L^2([-1,1])$.

2.12 Beschouw de lineaire deelruimte $V \subset L^2[0,\pi]$ bestaande uit eindige lineaire combinaties van de functies $x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x, \ldots$. Laat zien dat het orthogonale stelsel $\sin 2x, \sin 3x, \sin 4x, \ldots$ maximaal is in V maar dat het geen orthogonale basis van V is.

2.13 Laat zien dat als een lineaire surjectieve afbeelding F tussen Hilbertruimten H_1 en H_2 een isometrie is dan en slechts dan als $\|Ff\| = \|f\|$ voor alle $f \in H_1$. (Bekijk eerst reële Hilbertruimten, zie ook Lemma 9.3.)

2.14 Laat P_n een reëelwaardig polynoom van graad n zijn. Veronderstel dat $\int_{-1}^{1} P_n Q = 0$ voor alle polynomen Q van graad $< n$. Bewijs dat P_n ten minste, en dus precies n keer van teken wisselt op $(-1,1)$. Concludeer dat $P_n(1) \neq 0$.

2.15 Beschouw de Legendre-polynomen P_n ($n = 0, 1, 2\ldots$) verkregen door orthogonaliseren van de rij $1, x, x^2, \ldots$ in $L^2([-1,1])$ en genormaliseerd door $P_j(1) = 1$. Laat zien dat P_{2n} even is (dus alleen even machten van x bevat) en P_{2n+1} oneven is. Leid een "3-terms recurrente betrekking" af voor de P_n, dat wil zeggen, er bestaan relaties

$$P_{n+1}(x) = a_{n+1} x P_n(x) + b_{n+1} P_{n-1}(x)$$

voor zekere coëfficiënten a_n, b_n.

2.16 Laat zien dat

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n$$

loodrecht staat op de monomen $1, x, \ldots, x^{n-1}$ en concludeer dat dit polynoom dus van de vorm $c_n P_n$ is. Bereken c_n met behulp van de formule van Leibniz voor de n-de afgeleide van het product $(x-1)^n(x+1)^n$. Men verkrijgt zo de *formule van Rodrigues*

$$P_n = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n.$$

2.17 Gebruik de formule van Rodrigues om de coëfficiënt van x^n in $P_n(x)$ te berekenen. Leidt hieruit af dat de recurrente betrekking kan worden geschreven als

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

3. Eenvoudige operatorentheorie.

Operator, transformatie, afbeelding en functie staan in wezen voor het zelfde begrip, namelijk een functie, in de gebruikelijke verzamelingstheoretische betekenis, $L : D \to W$.

Wij zullen het woord operator gebruiken in de volgende situatie: $D \subset V$, V, W zijn vectorruimten over het lichaam $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ of $\mathbb{R}$; $D = D(L)$ heet het definitiegebied van L en is een deelruimte van V, $R(L) := L(D) \subset W$ heet de beeldverzameling. Als de operator begrensd (zie hieronder) is, valt D vaak samen met V. We spreken dan van een operator L van V naar W. Als $V = W$ spreken we van een operator in V. In het geval dat $L : D \to \mathbb{K}$ spreken we van een *functionaal.*

Laten $D \subset V$ en W vectorruimten zijn over $\mathbb{K}$. Een operator L van V naar W heet *lineair* als

$$L(tx + y) = tLx + Ly \quad (t \in K, \quad x, y \in D).$$

In het vervolg zullen we ons tot Banachruimten beperken. Omdat dit in het bijzonder topologische ruimten zijn heeft, heeft het zin om topologische eigenschappen van operatoren, zoals continuïteit, te onderzoeken.

Een operator L tussen Banachruimten V en W heet *begrensd* als $\exists C > 0$ zo dat voor alle $x \in V$

$$\|Lx\| \leq C\|x\|. \tag{1}$$

We noemen $\|L\| := \inf\{C : (1) \text{ is waar voor iedere } x\}$ de *operatornorm* van L, vergelijk stelling 3.3.

3.1. Voorbeeld. Stelling 2.4 spreekt uit dat projecties lineaire operatoren zijn. Als P een projectie is, is $\|Pf\| \leq \|f\|$, dus projecties zijn begrensd.

3.2. Stelling. *Voor een lineaire operator $L : V \to W$ zijn equivalent:*
1. *L is uniform continu.*
2. *L is continu in één punt.*
3. *L is begrensd.*

Bewijs. $1 \Rightarrow 2$ is duidelijk. $2 \Rightarrow 3$: Als L continu is in $x_0 \in V$, dan is er een $\delta > 0$ zo dat geldt $\|Lx - Lx_0\| \leq 1$ als $\|x - x_0\| \leq \delta$. Dus vinden we met $y = x - x_0$ en de lineariteit van L dat $\|Ly\| \leq 1$ als $\|y\| \leq \delta$ en vervolgens, dat voor alle $y \in V \backslash \{0\}$

$$\|Ly\| = \frac{\|y\|}{\delta} \left\| L\left(\frac{\delta}{\|y\|} y\right) \right\| \leq \frac{1}{\delta}\|y\|.$$

$3 \Rightarrow 1$: Zij $\epsilon > 0$. Er is een C met $\|Lx\| \leq C\|x\|$. Dus

$$\|Lx - Lx_0\| = \|L(x - x_0)\| \leq C\|x - x_0\| < \epsilon,$$

als $\|x - x_0\| < \epsilon/C$. □

Vanaf nu staat BLO voor begrensde lineaire operator en CLF voor continue (=begrensde) lineaire functionaal. We noteren de verzameling BLO's van V naar W met $\mathcal{B}(V, W)$. De verzameling CLF's op V heet de *duale* van V. Notatie V^*.

De kern van een lineaire operator $L : D \subset V \to W$ is $\mathrm{Ker} L := \{x \in D : \; Lx = 0\}$. De kern van L wordt ook wel met $\mathcal{N}(L)$ aangegeven. Het *beeld* van L is $\mathcal{R}(L) = \{Lx : \; x \in D\}$. Voor een BLO $L : V \to W$ geldt $\mathrm{Ker} L$ is een *gesloten* lineaire deelruimte, immers het origineel van een gesloten verzameling.

3.3. Stelling. *Laat V een genormeerde lineaire ruimte zijn en W een Banachruimte. Dan vormt $\mathcal{B}(V, W)$ met de natuurlijke vectorruimte-structuur en met als norm de operatornorm een Banachruimte.*

Bewijs. We leggen een vectorruimte-structuur op $\mathcal{B}(V, W)$ door $(L_1 + L_2)x := L_1 x + L_2 x, \; (tL)x := t(Lx)$. We controleren de driehoeksongelijkheid:

$$\|(L_1 + L_2)x\| \leq \|L_1 x\| + \|L_2 x\| \leq (\|L_1\| + \|L_2\|)\|x\|,$$

dus $\|L_1 + L_2\| \leq \|L_1\| + \|L_2\|$. De rest van de normeigenschappen is nog eenvoudiger. De volledigheid: als L_n een Cauchy rij is, dan is de rij $\|L_n\|$ zeker begrensd, zeg door C, dit volgt uit de driehoeksongelijkheid; verder is dan voor iedere $x \in V$ de rij $L_n x$ Cauchy, immers $\|L_n x - L_m x\| \leq \|L_n - L_m\| \, \|x\|$. Omdat W volledig is, bestaat $Lx = \lim_{n\to\infty} L_n x$. Het is duidelijk dat hierdoor een lineaire operator L wordt gedefinieerd. Tenslotte, omdat de norm continu is op W, $\|Lx\| = \lim \|L_n x\| \leq C\|x\|$, dus is $L \in \mathcal{B}(V, W)$ en $\|(L - L_n)x\| = \lim_{m\to\infty} \|(L_m - L_n)x\| < \epsilon\|x\|$ als n voldoende groot, en dus $\|L - L_n\| \to 0$ als $n \to \infty$.□

3.4. Voorbeeld.

Laat $V = W = L^2([0, 1])$. Voor een kwadratisch integreerbare functie K op $[0, 1] \times [0, 1]$ definiëren we de operator L_K door $(L_K f)(x) := \int_0^1 K(x, y)f(y)\, dy$. Men laat met behulp van Cauchy-Schwarz zien dat $\|L_K\| \leq \|K\|_2$:

$$\|L_K f\|_2^2 = \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x, y)f(y)\, dy \right|^2 dx \leq \left(\int_0^1 \int_0^1 |K(x, y)|^2 \, dy \, dx \right) \left(\int_0^1 |f(y)|^2 \, dy \right).$$

Dit soort operatoren heet *Hilbert-Schmidt operatoren*. De functie K heet de *kern* of *integraalkern* van de operator, men spreekt ook wel van *operatoren met kwadratisch integreerbare kern*. Uiteraard is het begrip uitbreidbaar tot operatoren op $L^2(\mu)$, waarbij μ een geschikte maat is.

Een speciale subklasse vormen de *Volterra-operatoren*. Dat zijn Hilbert-Schmidt operatoren met een kern K die voldoet aan $K(x, y) = 0$ als $y > x$. Deze treden op bij het inverteren van differentiaaloperatoren. We komen hier later op terug. Tenslotte merken we op dat ook op andere functieruimten door integraalkernen gedefinieerde operatoren bestudeerd worden.

3.5. Voorbeelden en Vraagstukken.

1. Allereerst een voorbeeld van een onbegrensde operator: Laat $V = W = C([0, 1])$ met de sup-norm, D de continu differentieerbare functies in V en $L : D \to W, \; Lf = f'$. Ga na dat L inderdaad onbegrensd is. Blijkbaar komen onbegrensde operatoren veelvuldig voor. Ga na dat M gedefinieeerd door $(Mf)(x) := \int_0^x f(t)\, dt$ een rechtsinverse is ($LM = Id$) en dat M wel begrensd is. Ga na dat M een Volterra-operator is.

Ga na dat de volgende operatoren en functionalen begrensd zijn. Kun je ook de norm schatten of zelfs bepalen? Deze voorbeelden komen later nog terug.

2. $V = \mathbb{C}^n$, $W = \mathbb{C}^m$, A een $m \times n$ matrix, L de door A geïnduceerde lineaire afbeelding.

***3.** (Kennis van Fourieranalyse vereist) $V = W = C([-\pi, \pi])$, $Lf = D_n * f$, waarbij D_n de n-de Dirichlet-kern is.

4. $V = C([0,1])$, $W = \mathbb{C}$. Voor $0 \leq x \leq 1$ definieert men $L_x f = f(x)$. Deze functionaal heet *puntevaluatie* (in x).

5. $V = W = l^2(\mathbb{N})$. De "linker shift" operator L_l wordt als volgt gedefinieerd:

$$L_l(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots).$$

De "rechter shift" operator definieert men door

$$L_r(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Bepaal hun norm en bereken $L_l L_r$ en $L_r L_l$.

6. $V = W = L^2([0,1])$. *Multiplier operatoren* zijn operatoren van de vorm $L : f \to af$ waarbij $a \in L^\infty([0,1])$. Wat is de norm? Veronderstel dat a differentieerbaar is op $[0,1]$; onderzoek wanneer L inverteerbaar is.

7. V is een Hilbertruimte met inproduct $\langle\ ,\ \rangle$, $W = \mathbb{K}$. Voor $y \in V$ definiëren we de functionaal $f_y(x) = \langle x, y \rangle$. Bepaal de norm van f_y; wordt deze aangenomen, d.w.z. is er een x met $|f_y(x)| = \|f_y\| \, \|x\|$?

8. Het volgende voorbeeld laat zien dat men zich niet altijd tot Banachruimten kan beperken. Laat $V = C^\infty(T)$ waarbij T de eenheidscirkel is. V is geen Banachruimte. Ga na dat men wel een metriek kan definiëren:

$$d(f,g) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \, d_i(f,g),$$

waarbij

$$d_i(f,g) = \min \left\{ 1, \|f^{(i)} - g^{(i)}\|_\infty \right\}.$$

Laat zien dat V volledig is in deze metriek. *Distributies op T zijn nu juist de CLF op V.

***9.** De Fouriertransformatie is een BLO in $L^2(\mathbb{R})$.

Voorbeeld 7 blijkt de algemene situatie te beschrijven.

3.6. Stelling (Riesz). *Iedere CLF f op een Hilbertruimte H is van de vorm $f(x) = f_y(x) := \langle x, y \rangle$ voor precies één $y \in H$. (We zeggen dat f door y gerepresenteerd wordt.) Dus, samen met Voorbeeld 7, volgt er dat de afbeelding $y \mapsto f_y$ bijectief is van H naar H^*.*

Bovendien (zie Opgave 3.3) is $\|f_y\| = \|y\|$.

Bewijs. *Uniciteit*: als y_1 en y_2 beide L representeren, geldt $\langle x, y_1 - y_2\rangle = Lx - Lx = 0$ voor alle x, dus $y_1 = y_2$.
Existentie: Merk om te beginnen op, dat als y bestaat, dan moet $y \perp$ kern van L. Als $Lx = 0$ voor alle x, dan nemen we $y = 0$. Anders is er een x_0 met $Lx_0 = 1$. De kern van L is een gesloten lineaire deelruimte K. De orthogonale projectie van x_0 op K bestaat wegens de projectiestelling 2.4 en geven we aan met q, zodat $x_0 - q \perp K$. Kies nu

$$y = \frac{x_0 - q}{\|x_0 - q\|^2}.$$

Inderdaad, voor $x \in H$ geldt $x - (Lx)x_0 \in K$ dus kunnen we schrijven $x = (Lx)(x_0 - q) + v$ voor zeker $v \in K$. Dan

$$\langle x, y\rangle = \langle (Lx)(x_0 - q) + v, y\rangle = (Lx)\,\langle (x_0 - q), y\rangle = Lx,$$

omdat $v \perp y$. □

Op de meeste L^2-achtige functieruimten zal puntevaluatie (vgl. 3.4.4) geen CLF zijn. Als dit wel het geval is dan krijgt men een fraaie theorie van "reproducerende" kernen. We behandelen de *Bergmanruimte* $A^2(\Delta)$. Zij Δ de open eenheidsschijf in $\mathbb{C}$.

$$A^2(\Delta) = \{f \in L^2(\Delta) :\ f \text{ holomorf op } \Delta\}.$$

3.7. Lemma. *Bij ieder* $z \in \Delta$ *is er een* $C_z > 0$ *zo dat voor alle* $f \in A^2(\Delta)$ *geldt dat*

$$|f(z)| \leq C_z \|f\|_2.$$

Bewijs. Neem $z \in \Delta$ vast. Kies r_0 zo klein dat de bal $B(z, r_0) \subset \Delta$. Wegens de middelwaardestelling (of de stelling van Cauchy) volgt er dat

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\,d\theta \quad (r \leq r_0).$$

Door toepassing hiervan op f^2 vinden we dat

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= \frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} |f(z)|^2 r\,dr \leq \frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})|^2\,d\theta\,r dr \\ &= \frac{1}{\pi r_0^2}\int_{B(z,r_0)} |f(x+iy)|^2 dx\,dy \leq \frac{1}{\pi r_0^2}\,\|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Het lemma volgt door worteltrekken, met $C_z = \frac{1}{r_0\sqrt{\pi}}$. □

Uit het Lemma en het bewijs daarvan volgt onmiddellijk:

3.8. Stelling. *$A^2(\Delta)$ is een gesloten deelruimte van $L^2(\Delta)$ en puntevaluatie in $z \in \Delta$ is een CLF op $A^2(\Delta)$.*

We laten het bewijs als opgave evenals dat van de volgende stelling.

3.9. Stelling. *Er bestaat precies één functie $K(z,w)$ op $\Delta \times \Delta$ met de volgende eigenschappen.*

1. *Voor $f \in A^2(\Delta)$ geldt*

$$f(z) = \int_\Delta K(z,w) f(w)\, dV_w \quad (V_w \text{ is Lebesguemaat});$$

2. *Voor vaste w is $K(\,.\,,w) \in A^2(\Delta)$.*
3. *$K(z,w) = \overline{K(w,z)}$.*

De functie K heet de *Bergmankern.*

3.10. Opgaven.

3.1 Laat L een CLF op een Banachruimte X zijn. Bewijs dat er een $u \in X$ bestaat zo dat er voor alle $x \in X$ er een $t \in \mathbb{K}$ en een $v \in \mathrm{Ker}L$ zijn met $x = tu + v$.

3.2 Laat H de completering van de ruimte van eenmaal continu differentieerbare functies $C^1([-1,1])$ zijn onder het inproduct

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} (f\bar{g} + f'\bar{g}')\, dx.$$

Laat zien dat voor een rij $\{f_j\}$ in $C^1([-1,1])$ het Cauchy zijn in H impliceert dat de rij $\{f_j\}$ uniform op $[-1,1]$ convergeert. Concludeer dat elementen van H door continue functies kunnen worden voorgesteld. Laat zien dat $f \mapsto f(0)$ een CLF op H is en (moeilijker*) bepaal $g \in H$ die deze functionaal representeert.

3.3 Laat zien dat voor een Hilbertruimte H de operatornorm van $L \in H^*$ samenvalt met de norm van de representant van L in H.

3.4 Voltooi het bewijs van Stelling 3.8 (zie Stelling 3.6).

3.5 Laat zien dat de monomen z^n een orthogonale basis van $A^2(\Delta)$ vormen. Bereken hun norm.

3.6 Laat zien dat een holomorfe f op Δ met machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ tot A^2 behoort dan en slechts dan als $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 (n+1)^{-1}$ convergeert.

3.7 Laat zien dat voor vaste z, $\overline{K(z,\,.\,)}$ de functionaal $f \mapsto f(z)$ representeert. Gebruik dit om het bestaan van K aan te tonen.

3.8 Bepaal de ontwikkeling van $\overline{K(z,w)}$ t.o.v. de orthonormale basis van monomen.

3.9 Voltooi het bewijs van Stelling 3.9.

4. Soorten operatoren.

4.1. Definitie. Een BLO $L : V \to W$ heet *van eindige rang* als $R(L)$ een eindig-dimensionale deelruimte van W is. De dimensie van $R(L)$ heet de *rang* van L.

4.2. Voorbeeld.

Neem Hilbertruimten V, W. Kies $\phi_1, \ldots, \phi_n \in V$, $\psi_1, \ldots, \psi_n \in W$ en definieer

$$Lx = \sum_1^n \langle x, \phi_j \rangle \, \psi_j .$$

Dit is een operator van rang $\leq n$ (strikte ongelijkheid treedt op als er afhankelijkheid in een van de stelsels zit).

Ook dit voorbeeld blijkt weer de algemene situatie te beschrijven:

4.3. Stelling. *Als L een BLO van eindige rang is tussen Hilbertruimten V en W, dan bestaat er een orthonormaal stelsel $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ in W en een stelsel $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ in V zo dat*

$$Lx = \sum_{j=1}^n \langle x, \phi_j \rangle \, \psi_j .$$

Bewijs. Omdat $R(L)$ eindig-dimensionaal is, is er een orthonormale basis $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ voor $R(L)$. Definieer lineaire functionalen F_i op V door $F_i(x) = \langle Lx, \psi_i \rangle$. We hebben begrensdheid: $\|F_i(x)\| = \|\langle Lx, \psi_i \rangle\| \leq \|L\| \, \|x\| \, \|\psi_i\|$. We kunnen F_i representeren door $\phi_i \in V$ zo dat $\langle Lx, \psi_i \rangle = \langle x, \phi_i \rangle$. Nu geldt

$$Lx = \sum_{j=1}^n \langle Lx, \psi_j \rangle \, \psi_j = \sum_{j=1}^n \langle x, \phi_j \rangle \, \psi_j .$$

□

4.4. Definitie. Laten V en W genormeerde lineaire ruimtes zijn. Een BLO $L : V \to W$ heet *compact* als iedere begrensde rij $\{x_j\}$ (i.e., $\exists C \geq 0$ zo dat $\forall j \; \|x_j\| \leq C$) een deelrij $\{x_{j_k}\}$ heeft zo dat $\{Lx_{j_k}\}$ convergeert.

4.5. Voorbeelden.

1. Een BLO van eindige rang is compact. Immers, het beeld van een begrensde rij is een begrensde rij in een eindig-dimensionale vectorruimte, en heeft dus een convergente deelrij.
2. De identiteit op $l^2(\mathbb{N})$ is *niet* compact: een orthonormale rij heeft geen convergente deelrij. De identiteit op een oneindig-dimensionale Banachruimte is overigens nooit compact, zie Opgave 4.13.
3. Een Hilbert-Schmidt operator op $L^2([a, b])$ is een compacte operator (zie Voorbeeld 3.4 en Opgave 4.3).

4.6. Stelling. *Zij V een genormeerde lineaire ruimte en W een Banachruimte. Dan vormen de compacte BLO's een gesloten lineaire deelruimte van $\mathcal{B}(V, W)$.*

Bewijs. Het is duidelijk dat de compacte BLO's een lineaire deelruimte vormen. We moeten nu bewijzen dat, als K_n ($n = 1, 2, \ldots$) compact zijn en $\|K - K_n\| \to 0$ met K een BLO, dan K compact is. Laat $\{x_j\}$ een rij in V zijn, begrensd door C. We kiezen een deelrij $\{x_{1,i}\}$ zo dat de rij $\{K_1 x_{1,i}\}$ convergeert. Vervolgens kiezen we uit $\{x_{1,i}\}$ een deelrij $\{x_{2,i}\}$ zo dat $\{K_2 x_{2,i}\}$ convergeert. Met inductie gaan we verder en verkrijgen we voor $j = 1, 2, \ldots$ steeds fijnere deelrijen $\{x_{j,i}\}_{i=1}^{\infty}$ met de eigenschap dat $\{K_m x_{j,i}\}_{i=1}^{\infty}$ convergeert voor alle $m \leq j$. Voor de diagonaalrij $\{x_{j,j}\}$ geldt dan dat voor iedere m $\{K_m x_{j,j}\}$ convergeert. Nu zien we met behulp van de driehoeksongelijkheid dat bij iedere $\varepsilon > 0$ voor voldoende grote n geldt:

$$\begin{aligned}\|Kx_{j,j} - Kx_{k,k}\| &\leq \|(K - K_n)x_{j,j} + K_n(x_{j,j} - x_{k,k}) + (K_n - K)x_{k,k}\| \\ &\leq 2\epsilon C + \|K_n x_{j,j} - K_n x_{k,k}\|.\end{aligned}$$

Kiezen we vervolgens j, k voldoende groot dan zal ook de laatste term $\leq \epsilon C$ worden. Dus $\{x_{j,j}\}$ is een deelrij van $\{x_j\}$ waarvoor $\{Kx_{j,j}\}$ een Cauchy-rij is dus (W is Banach) een convergente rij. □

4.7. Gevolg. *Laten $\{e_i\}$, resp. $\{f_i\}$, orthonormale stelsels zijn in de Hilbertruimten V, resp. W. Laat $\lambda_i \in \mathbb{C}$ naar 0 convergeren voor $i \to \infty$. Dan is*

$$Lx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x, e_i \rangle f_i$$

een compacte operator. De operator L dient opgevat als de limiet van de rij operatoren gedefinieerd door de partieelsommen; deze rij convergeert in operatornorm.

Bewijs. $L_n x := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i \rangle f_i$ is een operator van eindige rang en dus compact. We schatten met behulp van Pythagoras

$$\begin{aligned}\|(L_n - L_m)x\|^2 = \|\sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i \langle x, e_i \rangle f_i\|^2 &= \sum_{i=n+1}^{m} |\lambda_i|^2 |\langle x, e_i \rangle|^2 \\ &\leq \max_{n<i\leq m} |\lambda_i|^2 \sum_{i=n+1}^{m} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \max_{n<i\leq m} |\lambda_i|^2 \|x\|^2.\end{aligned}$$

Er volgt dat $\{L_n\}$ een Cauchy-rij is in $\mathcal{B}(V, W)$, en deze convergeert dus, met Stelling 3.3 en 4.6, naar een compacte operator. □

K4.1. Opmerking Equivalent met Definitie 4.4 is:

Een BLO $L : V \to W$ (V, W Banachruimtes) heet *compact* als het beeld onder L van de gesloten eenheidsbal in V relatief compact is, d.w.z. compacte afsluiting in W heeft.

Als H een Hilbertruimte is en $L : H \to H$ een BLO, dan is het beeld onder L van de gesloten eenheidsbal weer gesloten (zie Halmos, A Hilbert space problem book, Corollary to Problem 130). Er volgt hieruit dat het beeld onder een compacte BLO $L: H \to H$ van de gesloten eenheidsbal compact is.

Zie Opgave 4.14. Algemener dan het in deze opgave gestelde geldt:
Als V en W Banachruimtes zijn en V reflexief (zie Opgave 7.4 voor definitie van reflexiviteit) en als $L: V \to W$ een BLO is, dan is het beeld onder L van de gesloten eenheidsbal in V gesloten in W. Als L bovendien een compacte operator is, dan is dit beeld compact. Een bewijs van de eerste bewering gaat langs de volgende lijnen (verwijzingen naar Dunford & Schwartz, Volume 1). De gesloten eenheidsbal in V is compact in de zwakke topologie (Theorem V.4.7) vanwege reflexiviteit. De BLO L is ook continu t.o.v. de zwakke topologieën van V en W (Theorem V.8.13). Dus het beeld onder L van de gesloten eenheidsbal in V is compact in de zwakke topologie van W, dus gesloten in de zwakke topologie van W dus gesloten in de norm-topologie.

Zie Opgaven 4.15 en 4.16. De bewering over het gesloten zijn van het beeld onder $L: V \to W$ van de gesloten eenheidsbal in V is niet algemeen waar als V een niet-reflexieve Banachruimte is, bijv. als $V = C([0,1])$ en $W = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$.

Gevolg 4.7 geeft een klasse van compacte operatoren van een Hilbertruimte V naar een Hilbert-ruimte W die in operatornorm te benaderen zijn met operatoren van eindige rang. In het algemeen geldt dat een compacte operator op een Hilbertruimte in operatornorm te benaderen is met operatoren van eindige rang, zie Opgave 10.10. Op sommige Banachruimtes bestaan er echter compacte operatoren die niet in operatornorm te benaderen zijn met operatoren van eindige rang, zie P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math. 130 (1973), 309–317.

4.8. Definitie. Zij $L : H \to H$ een BLO in een Hilbertruimte H. Een *geadjungeerde* van L is een lineaire operator L^* die voor alle $x, y \in H$ voldoet aan

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^* y \rangle. \tag{3}$$

Als $L = L^*$, dan heet L *zelfgeadjungeerd*.

4.9. Voorbeeld. Als $H = \mathbb{C}^n$ en L de BLO geassocieerd met een matrix A dan is L^* de operator geassocieerd met de matrix $A^* = {}^t\bar{A}$.

4.10. Stelling. *Iedere BLO L op een Hilbertruimte H heeft precies één geadjungeerde L^*. Verder is L^* begrensd en $\|L\| = \|L^*\|$.*
(Zie ook een aanvullend resultaat in Opgave 4.17.)

Bewijs. Merk op dat $\langle Lx, y \rangle$ voor iedere $y \in H$ een CLF op H definieert met norm $\leq \|L\| \, \|y\|$. Dus er is precies een $z \in H$, $\|z\| \leq \|L\| \, \|y\|$ met $\langle Lx, y \rangle = \langle x, z \rangle$. Definieer $L^* y = z$. Men controleert eenvoudig dat L^* uniek is en lineair en norm $\leq \|L\|$ heeft. Er geldt nu voor alle $x, y \in H$:

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^* y \rangle = \overline{\langle L^* y, x \rangle} = \overline{\langle y, L^{**} x \rangle} = \langle L^{**} x, y \rangle.$$

Dus $L^{**} = L$ en er volgt dat $\|L\| = \|L^*\|$. $\square$

Laat $\operatorname{cl} X$ de afsluiting van X aangeven.

4.11. Stelling. *Zij L een BLO op een Hilbertruimte H. Dan geldt*
1. *$\operatorname{Ker} L = R(L^*)^\perp$.*
2. *$\operatorname{Ker} L^* = R(L)^\perp$.*
3. *$\operatorname{Ker} L^\perp = \operatorname{cl} R(L^*)$.*
4. *$\operatorname{Ker} L^{*\perp} = \operatorname{cl} R(L)$.*

Bewijs. Allereerst merken we op dat 2, 3 en 4 onmiddellijk uit 1 volgen door L door L^* te vervangen en/of orthoplement te nemen. Nu het bewijs van 1:

$$Lx = 0 \iff \forall y \in H \quad \langle Lx, y\rangle = 0 \iff \forall y \in H \quad \langle x, L^*y\rangle = 0 \iff x \perp R(L^*). \quad \square$$

4.12. Orthogonale Projecties.

In hoofdstuk 2 zijn orthogonale projecties behandeld, zie Stelling 2.4. We kijken nu naar projecties als operatoren op een Hilbertruimte H. Bij iedere gesloten deelruimte $Y \subset H$ is er een orthogonale projectie P op Y. Dit is een BLO, de begrensdheid volgt uit Pythagoras.

4.13. Stelling. *Een BLO $P : H \to H$ is een orthogonale projectie op een gesloten deelruimte Y dan en slechts dan als $P^2 = P$ en $P = P^*$.*

Bewijs. Als P een orthogonale projectie is op Y dan $P^2 = P$ en $\forall x\ (x - Px) \perp Y$, dus voor $x, y \in H$ geldt dat

$$\langle Px, y\rangle = \langle Px, (y - Py) + Py\rangle = \langle Px, Py\rangle = \langle Px + (x - Px), Py\rangle = \langle x, Py\rangle.$$

Omgekeerd geeft $P^2 = P$ dat $(P-I)P = 0$ dus $R(P) \subset \operatorname{Ker}(P-I)$. Maar ook: $(P-I)x = 0 \Rightarrow x \in R(P)$. Er volgt dat $Y = R(P)$ gesloten is. Als $P = P^*$ dan volgt met stelling 4.11 dat $Y = \operatorname{Ker} P^\perp$, d.w.z. voor alle $x \in H$ is $x - Px \in \operatorname{Ker} P \perp Y$. $\square$

4.14. Opgaven.

4.1 Laat zien dat L^* in stelling 4.10 inderdaad uniek en lineair is.

4.2 Gegeven een begrensd rijtje $\{t_j\}$ in $\mathbb{C}$. Beschouw de operator $L : l^2 \to l^2$, gedefinieerd door $L(x_1, x_2, \ldots) = (t_1x_1, t_2x_2, \ldots)$. Bepaal de norm van L. Voor welke rijtjes is L compact? Voor welke rijtjes is L zelfgeadjungeerd?

4.3 Laat zien dat Hilbert-Schmidt operatoren (zie Voorbeeld 3.4) op $L^2([a, b])$ compact zijn. *Aanwijzing*: Het is voldoende om dit voor $[a, b] = [-\pi, \pi]$ te bewijzen. Laat zien dat de functies $(x, y) \to e^{inx+imy}$ $(n, m \in \mathbb{Z})$ een orthogonale basis vormen voor $L^2([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$ en bekijk de ontwikkeling van de kern t.o.v. deze basis.

4.4 Zij L een Hilbert-Schmidt operator met kern K. Laat zien dat de geadjungeerde L^* ook Hilbert-Schmidt is en bepaal zijn kern. Hoe zien de kernen van zelfgeadjungeerde Hilbert-Schmidt operatoren er uit?

4.5 Zij L een zelfgeadjungeerde BLO in een Hilbertruimte H. Laat zien dat $\langle Lx, x\rangle$ reëelwaardig is voor alle $x \in H$.

4.6 Zij L een BLO tussen Hilbertruimten V en W. Zij $\{e_1, e_2, \ldots\}$ een orthonormale basis voor V en $\{f_1, f_2, \ldots\}$ een orthonormale basis voor W. Met L associëren we de oneindige matrix $A = (a_{ij})$, $a_{ji} = \langle Le_i, f_j\rangle$. Ga na dat $Lx = \sum_{i,j}\langle x, e_i\rangle a_{ji} f_j$. Omgekeerd kan men op deze manier met een oneindige matrix A formeel een operator L_A associëren. Geef voorwaarden voor A zo dat L_A resp. begrensd, van eindige rang, compact of zelfgeadjungeerd wordt.

4.7 Laat zien dat, als $K, L \in \mathcal{B}(H, H)$ en K compact is, dan KL en LK compact zijn.

4.8 Laat zien dat L gedefinieerd door $(Lf)(x) = \int_{-1}^{1} \sin(x-t) f(t)\, dt$ een BLO van eindige rang op $L^2([-1, 1])$ definieert.

4.9 Zij $K, L \in \mathcal{B}(H, H)$. Men definieert $e^L = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!}$. Laat zien dat de reeks "uniform" convergeert in $\mathcal{B}(H, H)$. Bewijs dat $KL = LK \Rightarrow e^{(L+K)} = e^L e^K$. (Vergelijk met het Cauchyproduct van absoluut convergente reeksen in $\mathbb{C}$.)

4.10 Zij L een compacte BLO op een Hilbertruimte. Laat zien dat L^* ook compact is. (Herschrijf $\|L^* x_n - L^* x_m\|^2$.)

4.11 Zij P een polynoom op $\mathbb{R}$. Laat zien dat de integraaloperator op $L^2([a, b])$ met kern $K(x, y) = P(x - y)$ van eindige rang is.

4.12 Zij $K, L \in \mathcal{B}(H, H)$. Laat zien dat $(KL)^* = L^* K^*$. Voltooi ook het bewijs van Stelling 4.10.

4.13 Bewijs dat de gesloten eenheidsbal in een oneindig-dimensionale genormeerde vectorruimte X niet compact is, door een rij in $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ in X te construeren met $\|a_n\| = 1$ en met de afstand van a_n tot $\mathrm{Span}(a_1, \ldots, a_{n-1})$ gelijk 1. Concludeer dat de identiteitsoperator op een oneindig-dimensionale genormeerde vectorruimte geen compacte operator is.

4.14 Geef een betrekkelijk kort en elementair bewijs dat het beeld onder $L\colon H \to H$ van de gesloten eenheidsbal gesloten is als $e_1, e_2, \ldots$ een orthonormale basis is van de Hilbertruimte H en als $Lx := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, e_j\rangle e_j$ $(x \in H)$ met $\lambda_j \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ en $\{\lambda_j\}_{j=1,2,\ldots}$ een begrensde verzameling in $\mathbb{C}$.

4.15 Bewijs dat, als V en W Banach-ruimtes zijn en V reflexief en als $L\colon V \to W$ een compacte BLO is, dan is er een $x \in V$ met $\|x\| = 1$ zo dat $\|Lx\| = \|L\|$ (dus het supremum in $\|L\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Lx\|$ wordt dan aangenomen). (Een eenvoudig geval doet zich voor als L een continue lineaire functionaal op een Hilbert-ruimte is, zie Opgave 3.3.)

4.16 Geef een voorbeeld van een BLO $L\colon H \to H$ (H een separabele oneindig-dimensionale Hilbertruimte) zo dat het supremum in $\|L\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Lx\|$ niet wordt aangenomen (ook al is de verzameling $\{Lx \mid \|x\| \leq 1\}$ gesloten).

4.17 Bewijs dat voor een begrensde lineaire operator L op een Hilbertruimte geldt dat $\|L^* L\| = \|L\|^2$ (aanvulling op Stelling 4.10). (Ten gevolge van deze formule vormen de BLO's op een Hilbertruimte H een zogenaamde C^*-*algebra*.)

5. De stelling van Baire en zijn gevolgen.

5.1. Baire-Categorie.

Laat X een topologische ruimte zijn. Een deelverzameling $A \subset X$ heet *nergens dicht* als de afsluiting van A leeg inwendige heeft, d.w.z. $\bar{A}^0 = \emptyset$. Een aftelbare vereniging $E = \cup A_n$ van nergens dichte deelverzamelingen A_n van X heet *van de eerste categorie* in X. Een deelverzameling E die niet van de eerste categorie is heet *van de tweede categorie.* Deze weinig geïnspireerde naamgeving dekt een topologisch begrip waarvan het belang voor de analyse moeilijk overschat kan worden.

5.2. Voorbeeld. *$\mathbb{Q}$ is van de eerste categorie in $\mathbb{R}$. (Merk op dat $\mathbb{Q}$ dicht is in $\mathbb{R}$.)*

5.3. Stelling van Baire. *Veronderstel dat X een a) complete metrische ruimte of een b) locaal compacte Hausdorff ruimte is. Dan is de doorsnijding van een aftelbare collectie open dichte deelverzamelingen van X weer dicht in X.*

Bewijs. Laat V_i $(i = 1, 2, \ldots)$ open dichte deelverzamelingen van X zijn en $B_0 \neq \emptyset$ een open deel van X. Kies $B_1 \neq \emptyset$ open zo dat $\bar{B}_1 \subset V_1 \cap B_0$ en met inductie $B_n \neq \emptyset$ open zo dat $\bar{B}_n \subset V_n \cap B_{n-1}$. In geval a) mogen we wel aannemen dat B_n een bol met straal $\leq 1/n$ is. Omdat $B_{n+1} \subset B_n$ en de straal van B_n naar nul gaat, bevat $\cap \bar{B}_n$ precies één limietpunt z, nl. het limietpunt van de middelpunten. Nu is $z \in B_0 \cap (\cap_i V_i)$, dus $\cap_i V_i$ is dicht.

In geval b) mogen we aannemen dat $\bar{B}_n$ compact is. Dan zal $\cap \bar{B}_n \neq \emptyset$. Met andere woorden: $\cap_i V_i$ is dicht. □

5.4. Gevolg. *Een Banachruimte X is van de tweede categorie in zichzelf en dus niet te schrijven als een aftelbare vereniging van nergens dichte deelverzamelingen.*

Bewijs. Veronderstel dat $X = \cup A_n$ met A_n nergens dicht. We mogen zonder verlies van algemeenheid A_n gesloten nemen. Dan zijn de complementen $E_n = A_n^c$ open dichte deelverzamelingen van X. Dus $E = \cap E_n$ is dicht. Maar $\cap E_n \subset (\cup A_n)^c = X^c = \emptyset$. □

De volgende drie stellingen zijn gebaseerd op de stelling van Baire. Men spreekt wel van een *categorie-argument* als de stelling van Baire wordt gebruikt.

5.5. Stelling van Banach-Steinhaus, Principe van Uniforme Begrensdheid.
Laat $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ een collectie begrensde lineaire operatoren zijn van een Banachruimte X naar een genormeerde lineaire ruimte Y. Veronderstel dat voor iedere $x \in X$ de verzameling $\{Lx : L \in \mathcal{L}\}$ begrensd is in Y, d.w.z., er is een $C_x \geq 0$ zo dat

$$\sup_{L \in \mathcal{L}} \|Lx\| \leq C_x.$$

Dan is $\mathcal{L}$ begrensd in $\mathcal{B}(X, Y)$, d.w.z., er is een $C \geq 0$ zo dat

$$\sup_{L \in \mathcal{L}} \|L\| \leq C.$$

Bewijs. Door C_x iets te vergroten mogen we wel aannemen dat $C_x \in \mathbb{N}$. Definieer

$$X_n = \bigcap_{L \in \mathcal{L}} \{x \in X : \|Lx\| \leq n\}.$$

Omdat L continu is, zal $\{x \in X : \|Lx\| \leq n\}$ gesloten zijn; X_n is de doorsnijding van zulke verzamelingen, dus ook gesloten. Nu is $\cup_n X_n = X$, omdat $x \in X_{C_x}$. Uit Gevolg 5.4 en de geslotenheid van X_n volgt dat er een n_0 is zo dat een open bal $B(x_0, r)$ in X_{n_0} ligt. Dat will zeggen dat $\|Lx\| \leq n_0$ voor $x \in B(x_0, r)$ en alle $L \in \mathcal{L}$. Dus voor $x \in B(0, r)$ vinden we

$$\|Lx\| \leq \|L(x + x_0)\| + \|Lx_0\| \leq 2n_0.$$

Dus voor $L \in \mathcal{L}$ geldt dat $\|L\| \leq 2n_0/r$. $\square$

5.6. Stelling van de open afbeelding. *Zij $L : X \to Y$ een BLO van een Banachruimte X naar een genormeerde ruimte Y. Als $L(X)$ van de tweede categorie is in Y, dan is L open en (dus) surjectief.*

Bewijs. Dat L *open* is, wil zeggen dat het beeld van elke open verzameling weer open is. Laat $B = B(0, 1)$ de open eenheidsbal in X zijn; dit is een open omgeving van 0 in X. Vanwege lineariteit is het voor openheid van L voldoende om te bewijzen dat $L(B)$ een open omgeving van 0 in Y omvat. Elke open lineaire afbeelding is vanzelf surjectief; dit volgt uit $L(tB) = tL(B)$. Nu het bewijs dat L open is. Er geldt:

$$L(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} L(kB) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kL(B).$$

$L(X)$ is van de tweede categorie, dus voor een zekere k heeft de afsluiting $\mathrm{cl}(kL(B))$ niet-leeg inwendige. Zij V de open eenheidsbal in Y. Het voorgaande zegt dat voor zekere $\delta > 0$ en $y_0 \in Y$ geldt $y_0 + \delta V \subset \overline{L(B)}$. Maar dan ook $-(y_0 + \delta V) = -y_0 + \delta V \subset \overline{L(B)}$ en dus $\delta V \subset \overline{L(B)}$.

Om het bewijs te voltooien, zullen we nu laten zien dat $\delta V \subset L(2\overline{B})$, dus $\delta V \subset L(3B)$, dus dat $\frac{1}{3}\delta V \subset L(B)$. Neem $y \in \delta V$. Dan $y \in \overline{L(B)}$. Dus $\exists x_1 \in B$ met $\|y - Lx_1\| < \frac{1}{2}\delta$. M.a.w., $y - Lx_1 \in \frac{1}{2}\delta V \subset \overline{\frac{1}{2}L(B)}$. We vinden dan een $x_2 \in \frac{1}{2}B$ zo dat $\|y - Lx_1 - Lx_2\| < \frac{1}{2^2}\delta$, zodat analoog $y - Lx_1 - Lx_2 \in \overline{\frac{1}{2^2}L(B)}$. We gaan met inductie verder en vinden punten $x_n \in \frac{1}{2^{n-1}}B$ zo dat

$$\|y - (Lx_1 + Lx_2 + \cdots + Lx_n)\| < \frac{1}{2^2}\delta. \tag{1}$$

Stel $z_n = x_1 + \cdots + x_n$. Dan is de rij $\{z_n\}_n$ Cauchy: voor $n < m$ geldt $\|z_n - z_m\| < \sum_{j=n+1}^{m} \|x_j\| < 1/2^{n-1}$. Noem de limiet van deze rij z. Dan $z_n \to z$, dus $Lz_n \to Lz$ maar ook, wegens (1), $Lz_n \to y$. We concluderen dat $Lz = y$ en omdat $\|z\| = \lim_{n\to\infty} \|z_n\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| \leq 2$, geldt $y \in L(2\overline{B})$. $\square$

5.7. Gevolg. *Laten X en Y allebei Banachruimtes zijn en zij $L : X \to Y$ een BLO. Als L surjectief is, dan is L open.*

Bewijs. $LX = Y$ en vanwege Gevolg 5.4 is dit van de tweede categorie in zichzelf. Pas nu de Stelling van de open afbeelding toe. □

5.8. Gevolg. *Laten X en Y allebei Banachruimtes zijn en zij $L : X \to Y$ een BLO. Als L bijectief is, dan is $L^{-1} : Y \to X$ continu.*

5.9. Stelling van de gesloten grafiek. *Zij $L : X \to Y$ een lineaire operator tussen de Banachruimten X en Y. Als de grafiek van L een gesloten deelruimte van $X \times Y$ is (met de product-topologie) dan is L continu.*

Bewijs. Merk op dat $X \times Y$ een Banachruimte wordt met norm

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Verder is de grafiek $\Gamma_L \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, Lx) : x \in X\}$ van f een lineaire deelruimte van $X \times Y$. Omdat Γ_L gesloten is, is Γ_L een Banachruimte. Laat nu π_1 de projectie op van $X \times Y$ op X zijn en π_2 die op Y. Deze projecties zijn continu, bijvoorbeeld $\|\pi_1(x, y)\| = \|x\| \leq \|(x, y)\|$. Nu is π_1 beperkt tot Γ_L een bijectieve BLO van Γ_L op X, dus π_1^{-1} is een continue BLO van X naar Γ_L wegens Gevolg 5.8. We concluderen dat $L = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ continu is. □

5.10. Opmerking.

Met Γ_L gesloten is equivalent: Als $x = \lim x_n$ en $y = \lim Lx_n$ bestaan, dan geldt $y = Lx$. Dit is dus voldoende voor continuïteit van L. Als we zonder gebruik te maken van de stelling van de gesloten grafiek willen bewijzen dat L continu is, moeten we ook het bestaan van $y = \lim Lx_n$ aantonen.

5.11. Opgaven.

5.1 Geef een voorbeeld van een reële functie op $\mathbb{R}$ die gesloten grafiek heeft, maar niet continu is.

5.2 Laat $\{x_i\}$ een rij getallen in $\mathbb{C}$ zijn. Veronderstel dat voor iedere $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l^2(\mathbb{N})$ geldt dat

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

convergeert. Bewijs dat $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$.

5.3* Zij f een oneindig vaak differentieerbare functie op $[0, 1]$ met de eigenschap dat in ieder punt $x \in [0, 1]$ slechts eindig veel afgeleiden van f ongelijk aan nul zijn. Bewijs dat f een polynoom is. [Laat met een categorie-argument zien dat f stuksgewijs een polynoom is op een open dichte deelverzameling; bestudeer het complement en pas weer een categorie-argument toe.]

5.4 Laat zien dat de continu differentieerbare functies een dichte deelverzameling van de eerste categorie vormen in $C([0,1])$ met de uniforme norm. Kun je ook een "direct" bewijs geven?

5.5* Laat D_n de n-de Dirichletkern geëvalueerd in 0 zijn, beschouwd als begrensde lineaire functionaal op $\{f \in C([-\pi,\pi]) : f(-\pi) = f(\pi)\}$ met sup-norm. Laat zien dat de normen van D_n onbegrensd zijn. Leid hieruit af dat er 2π-periodieke continue functies bestaan met een Fourierreeks die niet convergeert voor $x = 0$.

5.6 Laten T en S lineaire operatoren op een Hilbertruimte H zijn, zodanig dat voor alle x en y uit H geldt dat $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$. Bewijs dat T begrensd is.

5.7 Zij C_n de verzameling

$$\{f \in C([0,1]) : \exists t \in [0, 1-1/n] \text{ zo dat } |f(t+h) - f(t)| \leq nh \text{ voor } 0 \leq h \leq 1/n\}.$$

Laat zien dat C_n een gesloten deelverzameling van $C([0,1])$ is die nergens dicht is. Laat zien dat er continue functies op $[0,1]$ bestaan die nergens differentieerbaar zijn.

6. De Stelling van Hahn-Banach.

Dit hoofdstuk is eenvoudiger gehouden dan het hoofdstuk 6 "Andere aspecten van convexiteit" in de eerdere versie van J. Wiegerinck. Daar werd ook de Stelling van Krein-Milman bewezen. Hier beperken we ons tot een efficiënt bewijs van de stelling van Hahn-Banach, wat we overnemen uit §48 in het boek *Introduction to topology and modern analysis* van G. F. Simmons.

6.1. Stelling (Hahn-Banach). *Laat X een genormeerde vectorruimte zijn en $Y \subset X$ een lineaire deelruimte. Zij f een continue lineaire functionaal op Y. Dan kan f worden uitgebreid tot een continue lineaire functionaal ϕ op X met $\|\phi\| = \|f\|$.*

Het bewijs is tamelijk gecompliceerd. We beginnen met een lemma. Als we dat eenmaal bewezen hebben dan zijn we de moeilijkste stukken gepasseerd.

6.2. Lemma. *Laat X een genormeerde vectorruimte zijn en $Y \subset X$ een lineaire deelruimte. Zij f een continue lineaire functionaal op Y. Als $y_1 \in X\backslash Y$ en als $Y_1 := Y + \mathbb{K}y_1$ de lineaire deelruimte van X is die opgespannen wordt door Y en y_1, dan kan f worden uitgebreid tot een continue lineaire functionaal f_1 op Y_1 met $\|f_1\| = \|f\|$.*

Bewijs. We bewijzen het lemma eerst onder de aanname dat X een *reële* genormeerde lineaire ruimte is. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $\|f\| = 1$. Omdat $y_1 \notin Y$, kan ieder vector z in Y_1 uniek geschreven worden als $z = y + \alpha y_1$ met $y \in Y$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Het is duidelijk dat de definitie $f_1(y + \alpha y_1) = f_1(y) + \alpha f_1(y_1) = f(y) + \alpha r_1$ voor iedere keuze van het reële getal $r_1 = f_1(y_1)$ een lineaire uitbreiding van f tot Y_1 geeft. We willen het zo krijgen dat $\|f_1\| = 1$, dus we moeten bewijzen dat $|f_1(y+\alpha y_1)| \le \|y+\alpha y_1\|$ voor elke $y \in Y$ en voor elke $\alpha \neq 0$. Equivalent hiermee is achtereenvolgens:

$$|f(y) + \alpha r_1| \le \|y + \alpha y_1\|,$$

$$-\|y + \alpha y_1\| \le f(y) + \alpha r_1 \le \|y + \alpha y_1\|,$$

$$-f(y) - \|y + \alpha y_1\| \le \alpha r_1 \le -f(y) + \|y + \alpha y_1\|,$$

$$-f(\alpha^{-1}y) - \|\alpha^{-1}y + y_1\| \le r_1 \le -f(\alpha^{-1}y) + \|\alpha^{-1}y + y_1\|.$$

We zullen nu laten zien dat voor alle $y, y' \in Y$ geldt dat

$$-f(y) - \|y + y_1\| \le -f(y') + \|y' + y_1\|, \tag{6.1}$$

dus dat

$$\sup_{y\in Y}(-f(y) - \|y + y_1\|) \le \inf_{y\in Y}(-f(y) + \|y + y_1\|)$$

Een keuze van r_1 zo dat

$$\sup_{y\in Y}(-f(y) - \|y + y_1\|) \le r_1 \le \inf_{y\in Y}(-f(y) + \|y + y_1\|)$$

voldoet dan aan onze eisen.

Formule (6.1) volgt uit de volgende gelijk- en ongelijkheden:

$$f(y') - f(y) = f(y' - y) \leq |f(y' - y)| \leq \|f\| \, \|y' - y\| = \|y' - y\| \leq \|y' + y_1\| + \|y + y_1\|.$$

Nu gebruiken we het bewezene in het reële geval om het complexe geval te bewijzen. Dus nu is X een complexe lineaire ruimte en f is een continue complexe lineaire functionaal op Y met $\|f\| = 1$. Elke genormeerde complexe lineaire ruimte wordt een genormeerde reële lineaire ruimte door de scalars tot $\mathbb{R}$ te beperken. Dus X en Y kunnen ook als genormeerde reële lineaire ruimtes worden opgevat. Als $g(y)$ resp. $h(y)$ het reële resp. imaginaire deel van $f(y)$ is ($y \in Y$), dus als $f(y) = g(y) + ih(y)$, dan zijn g en h reële lineaire functionalen op Y. Ook geldt dat $\|g\| \leq 1$, $\|h\| \leq 1$, omdat $|g(y)| \leq |f(y)| \leq \|y\|$, en evenzo voor h. Er geldt

$$-h(y) + ig(y) = if(y) = f(iy) = g(iy) + ih(iy) \qquad (y \in Y),$$

dus $h(y) = -g(iy)$ als $y \in Y$, dus $f(y) = g(y) - ig(iy)$. We kunnen g als begrensde reële lineaire functionaal op Y nu met behulp van het net bewezen resultaat in het reële geval in twee stappen uitbreiden tot een begrensde reële lineaire functionaal g_1 op $Y_1 := Y + \mathbb{R}y_1 + \mathbb{R}iy_1$ met $\|g_1\| = \|g\|$. Definieer $f_1(x) := g_1(x) - ig_1(ix)$ ($x \in Y_1$). Dan volgt er onmiddellijk dat f_1 een uitbreiding is van f tot Y_1, dat $f_1(x) + f_1(x') = f_1(x + x')$ en dat $f_1(\alpha x) = \alpha f_1(x)$ als $\alpha \in \mathbb{R}$. Deze laatste eigenschap geldt ook voor complexe α omdat

$$f_1(ix) = g_1(ix) - ig_1(i^2 x) = g_1(ix) + ig_1(x) = i(g_1(x) - ig_1(ix)) = if_1(x).$$

Dus f_1 is een complexe lineaire functionaal op Y_1 opgevat als complexe lineaire ruimte. Er rest om te bewijzen dat $\|f_1\| = 1$. Omdat f_1 een uitbreiding is van f die norm 1 heeft, is het hiervoor voldoende om te bewijzen dat $\|f_1\| \leq 1$. Dus voor $x \in Y_1$ met $\|x\| = 1$ moeten we bewijzen dat $|f_1(x)| \leq 1$. Als $f_1(x) \in \mathbb{R}$ dan $f_1(x) = g_1(x)$ en $|f_1(x)| = |g_1(x)| \leq 1$ omdat $\|g_1\| \leq 1$. Als $f_1(x) \notin \mathbb{R}$, dan $f_1(x) = re^{i\theta}$ met $r > 0$ en $\theta \in \mathbb{R}$, dus

$$|f_1(x)| = r = e^{-i\theta} f_1(x) = f_1(e^{-i\theta} x) \in \mathbb{R},$$

en $\|e^{-i\theta} x\| = 1$, dus $|f_1(e^{-i\theta} x)| \leq 1$, dus $|f_1(x)| \leq 1$. □

Bewijs vn de Stelling van Hahn-Banach. Dit gaat met behulp van het Lemma van Zorn (Lemma 1.12). Zij $\mathcal{F}$ de collectie van uitbreidingen van f tot continue lineaire functionalen g op linaire deelruimtes X_g van X met $Y \subset X_g$ en $\|g\| = ||f\|$. Dan wordt $\mathcal{F}$ een partieel geordende verzameling met $g \leq h$ dan en slechts dan als $X_g \subset X_h$ en h beperkt tot X_g is gelijk aan g. Als $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ een keten in $\mathcal{F}$ is, laat dan g de lineaire functionaal zijn op $X_g := \cup_{\alpha \in A} X_{g_\alpha}$ zo dat $g(x) = g_\alpha(x)$ als $x \in X_{g_\alpha}$. Dan $\|g\| = \|f\|$. Want als $x \in X_{g_\alpha}$, dan $|g(x)| = |g_\alpha(x)| \leq \|g_\alpha\| \, \|x\| = \|f\| \, \|x\|$. Dus $\|g\| \leq \|f\|$. Maar ook $\|g\| \geq \|f\|$ omdat g een uitbreiding van f is. We zien dus dat g een bovengrens is van de keten $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Volgens het Lemma van Zorn heeft $\mathcal{F}$ dan een maximaal element ϕ. Dan $X_\phi = X$, want anders zouden we ϕ verder kunnen uitbreiden op grond van Lemma 6.2, maar dan zou ϕ geen maximaal element van $\mathcal{F}$ zijn. □

De volgende stellingen zijn eenvoudige gevolgen van de stelling van Hahn-Banach. Ze zijn van groot praktisch nut bij toepassingen van de stelling van Hahn-Banach.

6.3. Stelling. *Als X een genormeerde lineaire ruimte is en $0 \neq x_0 \in X$ dan is er een begrensde lineaire functionaal f_0 op X zo dat $f_0(x_0) = \|x_0\|$ en $\|f_0\| = 1$.*

Bewijs. Zij $Y := \mathbb{K}x_0$ en $f(\alpha x_0) := \alpha\|x_0\|$. Dan is f een lineaire functionaal op Y met $f(x_0) = \|x_0\|$ en $\|f\| = 1$. Neem een uitbreiding f_0 van f tot een begrensde lineaire functionaal op X volgens Hahn-Banach. Dan voldoet f_0 aan de eigenschappen vereist in de stelling. □

6.4. Gevolg. *De begrensde lineaire functionalen op een genormeerde lineaire ruimte X separeren de punten van X, d.w.z., als $x, y \in X$ en $x \neq y$, dan is er een begrensde lineaire functionaal f op X met $f(x) \neq f(y)$.*

Bewijs. Neem $x_0 := x - y \neq 0$ en f als de f_0 in Stelling 6.3. □

Voor een volgende toepassing van Hahn-Banach maken we gebruik van quotiëntruimtes van genormeerde lineaire ruimtes. Daarover eerst een stelling, waarbij voor het bewijs naar de opgaven wordt verwezen.

6.5. Stelling. *Zij Y een gesloten lineaire deelruimte van een genormeerde lineaire ruimte X. Beschouw de quotiëntruimte X/Y bestaande uit de nevenklassen $x+Y$ $(x \in X)$ op de gebruikelijke manier als een lineaire ruimte. Dan geldt:*

(a) X/Y wordt een genormeerde lineaire ruimte met norm

$$\|x + Y\| := \inf\{\|x + y\| : y \in Y\}.$$

(b) Zij $T : X \to X/Y$ de natuurlijke afbeelding die x stuurt naar $x + Y$. Dan is T een begrensde lineaire afbeelding met $\|T\| \leq 1$.

(c) Als X bovendien een Banachruimte is, dan is X/Y een Banachruimte.

6.6. Stelling. *Zij Y een gesloten lineaire deelruimte van een genormeerde lineaire ruimte X en zij $x_0 \in X \backslash Y$. Dan is er een begrensde lineaire functionaal f_0 op X die identiek 0 is op Y en met $f_0(x_0) \neq 0$.*

Bewijs. Gebruik Stelling 6.3 om een begrensde lineaire functionaal f op X/Y te vinden zo dat $f(x_0 + Y) \neq 0$. Zij $T : X \to X/Y$ de natuurlijke afbeelding, die volgens Stelling 6.5(b) begrensd is. Dan voldoet $f_0 := f \circ T$ aan de eisen van de stelling. □

6.7. Opgaven.

6.1 Geef met behulp van Stelling 3.6 korte bewijzen van de Stellingen 6.1, 6.3 en 6.6 in het geval dat X een Hilbertruimte is.

6.2 Geef een voorbeeld van een 2-dimensionale genormeerde reële vectorruimte X met 1-dimensionale deelruimte Y, een lineaire functionaal f op Y en een punt y_1 in X buiten Y zo dat f geen uitbreiding heeft tot een lineaire functionaal f_1 op X met $f_1(y_1) = 0$ en $\|f_1\| = \|f\|$.

6.3 Bewijs Stelling 6.5(a).

6.4 Bewijs Stelling 6.5(b).

6.5 Bewijs Stelling 6.5(c).

6.6 Laat d.m.v. voorbeelden zien dat de conclusies van Stelling 6.5(a) en van Stelling 6.6 niet waar hoeven te zijn als Y een niet-gesloten lineaire deelruimte is van een genormeerde lineaire ruimte X.

6.7 Zij X een genormeerde lineaire ruimte met lineaire deelruimte Y. Stel dat iedere begrensde lineaire functionaal op X die identiek 0 is op Y, ook identiek 0 is op X. Bewijs dat Y dicht ligt in X.

6.8 Bewijs door aanpassing van de bewijzen van Lemma 6.2 (reële geval) en Stelling 6.1 het volgende. Zij X een reële lineaire ruimte met lineaire deelruimte Y. Laat op X een reëelwaardige functie p gegeven zijn zo dat $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ en $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ $(\alpha > 0)$. Zij f een reële lineaire functionaal op Y zo dat $f(y) \leq p(y)$ $(y \in Y)$. Dan kan f worden uitgebreid tot een reële lineaire functionaal ϕ op X zo dat $\phi(x) \leq p(x)$ $(x \in X)$.

7. Dualiteit.

De duale ruimte X^* van een genormeerde lineaire ruimte X bestaat uit de continue lineaire functionalen op X, dus $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$. Omdat $\mathbb{K}$ een (1-dimensionale) Banachruimte is, volgt er uit Stelling 3.3 dat X^* t.o.v. de operatornorm een Banachruimte is.

Uit Stelling 3.6 (Riesz) samen met Voorbeeld 7 erboven en met Opgave 3.3 volgt er dat de afbeelding $y \mapsto \phi_y : H \to H^*$ met $\phi_y(x) := \langle x, y\rangle$ een *anti-isomorfisme* van genormeerde lineaire ruimtes is, d.w.z. bijectief, norm behoudend en anti-lineair, waarbij *anti-lineair* betekent dat $\phi_{y+z} = \phi_y + \phi_z$, $\phi_{\alpha y} = \overline{\alpha}\phi_y$. Dan wordt H^* een Hilbertuimte met inproduct $\langle \phi_y, \phi_z\rangle := \langle z, y\rangle = \overline{\langle y, z\rangle}$ en de afbeelding $y \mapsto \phi_y : H \to H^*$ is een anti-isomorfisme van Hilbertruimtes.

In het geval dat $H = L^2(\mu)$ (de Hilbertruimte van L^2-functies op een maatruimte, zie hieronder) is $\phi_g(f) = L_{\overline{g}}(f)$ met

$$L_g(f) := \int f\, g\, d\mu \tag{7.1}$$

en dan is $g \mapsto L_g : L^2(\mu) \to L^2(\mu)^*$ een *isomorfisme* van genormeerde lineaire ruimtes, d.w.z. bijectief, norm behoudend en lineair. In dit hoofdstuk laten we o.a. zien dat er soortgelijke isomorfismen $g \mapsto L_g : L^q(\mu) \to L^p(\mu)^*$ bestaan als $1 < p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

De *biduale* $X^{**} = (X^*)^*$ van een genormeerde lineaire ruimte X is de duale ruimte van de duale ruimte X^* van X. Iedere $x \in X$ kan worden opgevat als een begrensde lineaire functionaal F_x op X^*:

$$F_x(f) := f(x) \qquad (x \in X,\ f \in X^*). \tag{7.2}$$

Er geldt $|F_x(f)| = |f(x)| \le \|x\|\,\|f\|$, dus $F_x \in X^{**}$ met $\|F_x\| \le \|x\|$. Vanwege Stelling 6.3 is er een $f \in X^*$ met $\|f\| = 1$ zo dat $|F_x(f)| = |f(x)| = \|x\|$, dus $\|F_x\| = \|x\|$. De afbeelding $x \mapsto F_x$ is ook duidelijk lineair. Dus we hebben bewezen:

7.1. Stelling. *Zij X een genormeerde lineaire ruimte. Dan is de afbeelding $x \mapsto F_x : X \to X^{**}$ een norm behoudende (dus injectieve en continue) lineaire afbeelding van X in X^{**}.*

7.2. Definitie. *Een genormeerde lineaire ruimte X heet* **reflexief** *als de afbeelding $x \mapsto F_x : X \to X^{**}$ surjectief is. Dan is X noodzakelijkerwijs een Banachruimte en de afbeelding $x \mapsto F_x$ is een isomorfisme van Banachruimtes.*

Als H een Hilbertruimte is en $\phi_y(x) := \langle x, y\rangle$, dan $F_x(\phi_y) = \phi_y(x) = \langle x, y\rangle = \langle \phi_y, \phi_x\rangle = \phi_{\phi_x}(\phi_y)$. De afbeelding $x \mapsto F_x$ is dan een isomorfisme van Hilbertruimtes en H is reflexief.

We zullen hieronder zien dat de ruimtes $L^p(\mu)$ reflexief zijn als $1 < p < \infty$, maar niet als $p = 1$ of ∞. Eerst wat recapitulatie over maatruimtes en functieruimtes daarop.

7.3. Definitie. *Zij μ een positieve maat op een σ-algebra $\mathcal{B}$ van deelverzamelingen van een verzameling S. De ruimte $L^p(\mu)$, $(0 < p < \infty)$ bestaat uit de (equivalentieklassen van) $\mathcal{B}$-meetbare functies f met de eigenschap dat $|f|^p$ μ-integreerbaar is. [We noemen twee functies equivalent als ze hoogstens op een verzameling van μ-maat 0 verschillen.] De* *ruimte $L^\infty(\mu)$ bestaat uit alle essentieel (μ) begrensde functies, d.w.z. equivalentieklassen die een begrensde functie bevatten.*

Als μ de Lebesgue-maat is op een verzameling $K \subset \mathbb{R}^n$ schrijven we meestal $L^p(K)$ in plaats van $L^p(\mu)$. Voor $f \in L^p(\mu)$ noteren we, als het duidelijk is om welke μ het gaat, $\|f\|_p \stackrel{\text{def}}{=} (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$ voor $p < \infty$ en $\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \text{ess.sup}|f| \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t : \ \mu\{|f| > t\} = 0\}$, vgl. de syllabus Integratietheorie.

7.4. Lemma. *Voor $a, b \geq 0$ geldt*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \text{als } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ p, q \in (1, \infty).$$

Bewijs. Laat D de rechthoek $0 \leq x \leq a, \ 0 \leq y \leq b$ zijn.

$$\begin{aligned} ab &= \int_0^a \int_0^b dxdy = \iint_{\substack{y<x^{p-1} \\ (x,y)\in D}} dxdy + \iint_{\substack{y>x^{p-1} \\ (x,y)\in D}} dxdy \\ &= \iint_{\substack{y<x^{p-1} \\ (x,y)\in D}} dxdy + \iint_{\substack{x<y^{q-1} \\ (x,y)\in D}} dxdy \leq \int_0^a \int_0^{x^{p-1}} dydx + \int_0^b \int_0^{y^{q-1}} dxdy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \end{aligned}$$

$\square$

Merk op dat $p^{-1} + q^{-1} = 1$ equivalent kan worden geschreven als $(p-1)(q-1) = 1$. Uit het bewijs volgt dat de ongelijkheid in het Lemma een gelijkheid wordt desda $b = a^{p-1}$.

7.5. Stelling (Ongelijkheden van Hölder en van Minkowski). *Zij weer $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < \infty$ en veronderstel dat f, g μ-meetbaar zijn. Dan geldt de ongelijkheid van Hölder:*

$$\int |fg| \, d\mu \leq \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int |g|^q \, d\mu \right)^{1/q}$$

en die van Minkowski:

$$\left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Bewijs. Merk op dat we niets hoeven te bewijzen als de rechterleden oneindig zijn. We mogen voor Hölder dus aannemen dat $\|f\|_p$ en $\|g\|_q$ eindig zijn en ook dat f en g niet b.o. 0 zijn. Merk op dat de ongelijkheid invariant is onder vermenigvuldiging van f en g met een constante. Men mag dus f door $f/\|f\|_p$ vervangen en g door $g/\|g\|_q$, zodat we mogen aannemen $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Uit Lemma 7.4 volgt nu dat

$$\int |fg| d\mu \leq \frac{1}{p} (\int |f|^p d\mu) + \frac{1}{q} (\int |g|^q d\mu) = 1 = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Vervolgens de ongelijkheid van Minkowski:

$$\int |f+g|^p d\mu \leq \int |f|\,|f+g|^{p-1} d\mu + \int |g|\,|f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\leq \|f\|_p \left(\int |f+g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} + \|g\|_p \left(\int |f+g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q},$$

waarbij de tweede ongelijkheid volgt uit de ongelijkheid van Hölder. Nu is $(p-1)q = p$ en $1 - 1/q = 1/p$. Delen door $\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1/q}$ geeft het gewenste resultaat. □

7.6. Stelling. *Zij $1 \leq p \leq \infty$. Met norm $\|\cdot\|_p$ wordt $L^p(\mu)$ een Banachruimte.*

Bewijs. (schets) De driehoeksongelijkheid voor $\|\cdot\|_1$ volgt onmiddelijk uit de gewone driehoeksongelijkheid toegepast op de integrand. Ook de driehoeksongelijkheid voor $\|\cdot\|_\infty$ volgt direct uit de gewone. Als $1 < p < \infty$ dan geeft de ongelijkheid van Minkowski dat de som van twee L^p-functies weer in L^p zit. Ook maakt deze ongelijkheid duidelijk dat aan de driehoeksongelijkheid voldaan is. Homogeniteit van $\|\cdot\|_p$ is duidelijk, dus $\|\cdot\|_p$ is een norm voor alle p. De volledigheid grijpt terug op integratietheorie. Men laat zien dat een Cauchyrij een deelrij heeft die bijna overal convergeert en dat de limiet een L^p functie f is. Tenslotte laat men zien dat de Cauchyrij in L^p-norm naar f convergeert. Voor details zie Integratietheorie, waar de gevallen $p = 1, 2, \infty$ uitvoerig behandeld worden, of Rudin [2]. □

We onderzoeken nu de dualen van de L^p-ruimten. Zij $1/p + 1/q = 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$, waarbij we afspreken dat $1/\infty = 0$. Kies $g \in L^q(\mu)$, dan is $L_g : L^p(\mu) \to \mathbb{C}$ zoals gedefinieerd door (7.1) een CLF. Het is duidelijk dat L_g lineair is; begrensdheid is duidelijk als $p = 1$ of $p = \infty$ en volgt in de andere gevallen uit de ongelijkheid van Hölder. We zien dat L^q bevat is in de duale van L^p. Meer is waar:

7.7. Stelling. *Zij μ een σ-eindige positieve maat op X en zij $1 \leq p < \infty$. Voor iedere $L \in L^p(\mu)^*$ is er precies één $g \in L^q(\mu)$ met $L = L_g$. De duale ruimte $(L^p)^*$ kan geïdentificeerd worden met L^q. Bovendien is $\|L_g\| = \|g\|_q$.*

Bewijs. We behandelen hier alleen het geval $\mu(X) < \infty$, zie voor het algemene geval Rudin [2]. We schrijven L^p voor $L^p(\mu)$. Als $L_g = L_h$ dan is

$$0 = \int (h-g) f \, d\mu, \quad \forall f \in L^p.$$

Dit geldt in het bijzonder als f de karakteristieke functie van een μ-meetbare verzameling is, dus $h = g$ en uniciteit is bewezen. Uit de ongelijkheid van Hölder volgt ($p > 1$) verder dat $\|L_g\| \leq \|g\|_q$; het geval $p = 1$ is weer eenvoudig.

Nu construeren we g. Eerst construeren we een maat die absoluut continu is met betrekking tot μ. Voor een μ-meetbare E schrijven we

$$\lambda(E) = L\chi_E.$$

Omdat L lineair is, geldt $\lambda(E_1 \cup E_2) = \lambda(E_1) + \lambda(E_2)$ als $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, dus λ is eindig additief. Verder geldt

$$|\lambda(E)| \leq \|L\| \, \|\chi_E\|_p = \|L\| \, (\mu(E))^{1/p}. \tag{$*$}$$

Om σ-additiviteit te bewijzen, nemen we $E = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, een aftelbare vereniging van disjuncte meetbare verzamelingen, en we schrijven $E_k = \cup_{i=1}^{k} A_i$. We vinden met $(*)$ dat $|\lambda(E \setminus E_k)| < \|L\| \, |\mu(E \setminus E_k)| \to 0$ als $k \to \infty$, dus σ-additiviteit. Uit $(*)$ volgt onmiddellijk dat λ absoluut continu is m.b.t. μ, en volgens de stelling van Radon-Nikodym is er dan een $g \in L^1$ zo dat $d\lambda = g \, d\mu$. Voor karakteristieke functies f van meetbare verzamelingen hebben we $L_g f = Lf$. Vanwege lineariteit is dit dan ook het geval voor simpele functies en ook voor de uniforme limieten daarvan, $f \in L^{\infty}$. We moeten laten zien dat $g \in L^q$: Het eenvoudigst is het geval $p = 1$. Er geldt voor een karakteristieke functies χ_E

$$|L\chi_E| = \left| \int_E g \, d\mu \right| \leq \|L\| \, |\mu(E)|,$$

dus $g \in L^{\infty}$ en $\|g\|_{\infty} \leq \|L\|$.

Nu het geval $p > 1$. Er bestaat een L^{∞}-functie α met L^{∞}-norm 1 zo dat $|g| = \alpha g$. We willen natuurlijk het volgende doen:

$$\int |g|^q \, d\mu = \int \alpha |g|^{q-1} g \, d\mu \leq \|L\| \, \|g^{q-1}\|_p = \|L\| \int (|g|^q d\mu)^{1/p},$$

waaruit een schatting voor $\|g\|_q$ zou volgen. Omdat $|g|^{q-1}$ niet begrensd is, moeten we dit idee iets aanpassen. Zij $E_n = \{x : \ |g(x)| < n\}$ en $f = |g|^{q-1} \alpha \chi_{E_n}$. Dan $|f|^p = |g|^q \chi_{E_n}$, dus f begrensd en $\|f\|_p^p \leq \|g\|_q^q$. En als boven

$$\int_{E_n} |g|^q d\mu = \int fg \, d\mu \leq \|L\| \, \|f\|_p = \|L\| \left(\int_{E_n} |g|^q d\mu \right)^{1/p} < \infty.$$

In deze ongelijkheid kunnen we door $\left(\int_{E_n} |g|^q d\mu \right)^{1/p}$ delen (als deze uitdrukking nul is, is het resultaat er al) en vinden dan $\left(\int_{E_n} |g|^q d\mu \right)^{1/q} \leq \|L\|$ onafhankelijk van n. Laten we n naar ∞ gaan dan vinden we (monotone convergentie) dat $g \in L^q(\mu)$ en $\|g\|_q \leq \|L\|$. Tenslotte volgt uit de ongelijkheid van Hölder en het feit dat L^{∞} dicht ligt in L^p, dat $Lf = \int fg \, d\mu$ voor alle $f \in L^p$. $\square$

Zonder bewijs vermelden we de volgende stelling.

7.8. Representatiestelling van Riesz. *Laat X een locaal compacte Hausdorffruimte zijn en $C_0(X)$ de afsluiting van de compact gedragen continue functies op X in de uniforme norm. Dan kan $C_0(X)^*$ geïdentificeerd worden met de collectie complexe reguliere Borelmaten op X door*

$$\mu \to L_{\mu}, \quad L_{\mu} f \stackrel{\text{def}}{=} \int f \, d\mu.$$

□

Verder geldt $\|L_\mu\| = |\mu|(X)$, waarbij $|\mu|(E)$ de totale variatie van μ over E is, dat wil zeggen, $|\mu|(E) = \sup\{\sum_{i=1}^n |\mu(E_i)|\}$, waarbij het supremum genomen wordt over alle verdelingen van E in meetbare, onderling disjuncte deelverzamelingen E_i van E.

7.9. Opgaven.

7.1 Laat zien dat voor een Banachruimte B geldt: B is reflexief desda B^* is reflexief.

7.2 Geef een snel bewijs dat $(l^p)^* \cong l^q$ als $1 \leq p < \infty$ en $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (voor notatie, zie 1.6). Dit laat dus ook snel zien dat l^p reflexief is als $1 < p < \infty$.

7.3 Laat zien dat $c_0^* \cong l^1$ (voor notatie, zie 1.6). Laat ook zien dat $(l^\infty)^* = (l^1)^{**}$ echt groter is dan l^1. Dit laat zien dat c_0, l^1 en l^∞ niet reflexief zijn.

7.4 Toon aan dat $L^\infty([0,1])^*$ groter is dan $L^1([0,1])$ door Hahn-Banach toe te passen op een geschikte functionaal op $C([0,1])$.

7.5 Geef een voorbeeld van een continue lineaire functionaal ϕ op $C([0,1])$ (reëelwaardig) t.o.v. de sup-norm (een niet-reflexieve Banach-ruimte) zo dat het beeld onder ϕ van de gesloten eenheidsbal in $C([0,1])$ niet gesloten is in $\mathbb{R}$.

7.6 Wat gaat er mis in het bewijs van Stelling 7.7 als $p = \infty$?

7.7 Laat zien dat als μ een complexe reguliere Borelmaat op een compacte verzameling X is, dan is L_μ uit Stelling 7.8 inderdaad een CLF.

8. Zwakke topologie.

Dit hoofdstuk is nieuw t.o.v. de vorige versie van deze syllabus. Ook hier volgen we voor een groot deel het betreffende gedeelte (§49) in het boek *Introduction to topology and modern analysis* van G. F. Simmons.

8.1. Definitie. Zij X een genormeerde lineaire ruimte. De *zwakke topologie* op X is de zwakste topologie op X zo dat alle $f \in X^*$ continu zijn op X.

In de zwakke topologie op X moeten dus in ieder geval de verzamelingen $U_{f,x,\varepsilon} := \{y \in X : |f(y) - f(x)| < \varepsilon\}$ $(f \in X^*,\ x \in X,\ \varepsilon > 0)$ open zijn: dit is een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor een topologie op X om alle $f \in X^*$ continu te laten zijn. De verzamelingen $U_{f,x,\varepsilon}$ zijn nu een z.g. *subbasis* van de gezochte zwakke topologie: de collectie van alle eindige doorsneden van de verzamelingen $U_{f,x,\varepsilon}$ vormt een z.g. *basis* van de zwakke topologie, en de collectie van alle verenigingen van eindige doorsneden van de verzamelingen $U_{f,x,\varepsilon}$ vormen de collectie van alle open verzamelingen in de zwakke topologie op X. (Dit is de algemene methode om de zwakste topologie te construeren waarin de tot een gegeven collectie behorende verzamelingen allemaal open zijn.)

De zwakke topologie op X is Hausdorff (zie Opgave 8.1). Ook zijn de optelling en de scalaire vermenigvuldiging continue operaties t.o.v. de zwakke topologie (zie Opgave 8.2). Iedere open deelverzameling van X in de zwakke topologie (we zeggen zwak open verzameling) is ook open in de oorspronkelijke (norm-)topologie op X. Evenzo is iedere zwak gesloten deelverzameling van X norm-gesloten. Maar het omgekeerde hoeft niet te gelden.

Gegeven een genormeerde lineaire ruimte X, kunnen we natuurlijk ook X^* met de zwakke topologie bekijken. Die topologie is de zwakste topologie op X^* zo dat alle $F \in X^{**}$ continu zijn op X^*. We hebben in het vorige hoofdstuk gezien dat X isometrisch ingebed ligt in X^{**}. Een nog zwakkere topologie op X^* krijgen we als we ons beperken tot continuïteit van de de lineaire functionalen F_x ($x \in X$, zie formule (7.2)) op X^*:

8.2. Definitie. Zij X een genormeerde lineaire ruimte. De *zwak* topologie* op X^* is de zwakste topologie op X^* zo dat voor alle $x \in X$ de lineaire functionalen $f \mapsto f(x)$ continu zijn op X^*.

De subbasis van open verzamelingen voor de zwak* topologie op X^* bestaat uit de verzamelingen $U_{x,f,\varepsilon} := \{g \in X^* : |g(x) - f(x)| < \varepsilon\}$, waarbij $x \in X$, $f \in X^*$, $\varepsilon > 0$.

Merk op dat, als X een reflexieve Banachruimte is, dan $X = (X^*)^*$, dus we kunnen dan van de zwak* topologie op X spreken door X te beschouwen als duale ruimte van X^*. Deze topologie is dan de zwakste topologie op X zo dat alle lineaire functionalen op X afkomstig van $(X^*)^{**}$ continu zijn op X. Maar $(X^*)^{**} = X^*$ als X reflexief is. Dus de zwak* topologie is hier juist de zwakke topologie op X. Dus op een reflexieve Banachruimte X is de zwakke topologie ook op te vatten als zwak* topologie, en eigenschappen die we over de zwak* topologie kunnen bewijzen, gelden dan ook voor de zwakke topologie op een reflexieve Banachruimte.

8.3. Propositie. *Zij X een genormeerde lineaire ruimte. Dan is de zwak* topologie op X^* Hausdorff.*

Bewijs. Neem $f, g \in X^*$ met $f \neq g$. Dan is er een $x \in X$ zo dat $f(x) \neq g(x)$. Laat $\varepsilon := |f(x) - g(x)|/3$. Dan zijn $U_{x,f,\varepsilon}$ en $U_{x,g,\varepsilon}$ disjuncte zwak* open omgevingen van f resp. g. □

We komen nu tot het belangrijkste resultaat uit dit hoofdstuk.

8.4. Stelling (Banach-Alaoglu). *Zij X een genormeerde lineaire ruimte. Dan is de gesloten eenheidsbal in X^* compact in de zwak* topologie.*

Bewijs. Schrijf $B^* := \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ voor de gesloten eenheidsbal in X^*. Dan kan B^* ook worden opgevat als de collectie van alle lineaire functionalen f op X zo dat $|f(x)| \leq \|x\|$ voor alle $x \in X$. Schrijf $D_x := \{z \in \mathbb{K} : |z| \leq \|x\|\}$ $(x \in X)$ en $D := \prod_{x \in X} D_x$ (een direct product van doorgaans oneindig veel verzamelingen). Dan is $\Phi : f \mapsto \{f(x)\}_{x \in X} : B^* \to D$ een injectieve afbeelding en het beeld $\Phi(B^*)$ van deze afbeelding is de deelverzameling van D bestaande uit alle $z = \{z_x\}_{x \in X} \in D$ zo dat $z_x + z_y = z_{x+y}$ voor alle $x, y \in X$ en $z_{\alpha x} = \alpha z_x$ voor alle $x \in X$ en alle $\alpha \in \mathbb{K}$.

Per definitie wordt de topologie op D, als direct product van topologische ruimten, gegeven door de zwakste topologie waarbij alle projecties van D op de factoren D_x continu zijn. Dus een subbasis van de topologie op D wordt gegeven door de verzamelingen $V_{x,z,\varepsilon} := \{w \in D : |w_x - z_x| < \varepsilon\}$ $\quad (x \in X,\ z = \{z_y\}_{y \in X} \in D,\ \varepsilon > 0)$. Dan vormen de verzamelingen $V_{x,z,\varepsilon} \cap \Phi(B^*)$ een subbasis voor de door D op $\Phi(B^*)$ geïnduceerde topologie. Dus we zien dat de bijectieve afbeelding $\Phi : B^* \to \Phi(B^*)$ de subbasis van de zwak* topologie van B^* afbeeldt op de subbasis van de topologie van $\Phi(B^*)$, dus een homeomorfisme is. Om te bewijzen dar B^* zwak* compact is, kunnen we dus evengoed bewijzen dat $\Phi(B^*)$ compact is.

Alle gesloten eenheidsschijven D_x zijn compact. Volgens de *stelling van Tychonoff* (een standaardresultaat uit de topologie) is het product van compacte verzamelingen weer compact. Dus D is compact. Gesloten deelverzamelingen van D zullen dus weer compact zijn. We hoeven dus alleen nog maar te bewijzen dat $\Phi(B^*)$ een gesloten deelverzameling van D is. Laat w in de afsluiting van $\Phi(B^*)$ zitten. We moeten dan bewijzen dat $w_x + w_y - w_{x+y} = 0$ en $w_{\alpha x} - \alpha w_x = 0$ voor alle x, y, α. Bijv., om voor gegeven $x, y \in X$ te bewijzen dat $w_x + w_y - w_{x+y} = 0$, laat $\varepsilon > 0$. Dan is er een z in $\Phi(B^*)$ zo dat $z \in V_{x,w,\varepsilon/3} \cap V_{y,w,\varepsilon/3} \cap V_{x+y,w,\varepsilon/3}$. Dus $|w_x + w_y - w_{x+y}| \leq |z_x + z_y - z_{x+y}| + \varepsilon = \varepsilon$. Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig is genomen, volgt er dat $w_x + w_y - w_{x+y} = 0$. Het bewijs van $w_{\alpha x} - \alpha w_x = 0$ gaat analoog. □

8.5. Gevolg. *In een reflexieve Banachruimte (dus zeker in een Hilbertruimte) is de gesloten eenheidsbal zwak compact.*

Het omgekeerde is ook waar: Als in een Banachruimte X de gesloten eenheidsbal zwak compact is, dan is X reflexief. Zie bijv. Dunford & Schwartz, Linear operators I, General theory, Theorem V.4.7.

Het bewijs van de volgende propositie wordt als opgave gelaten (zie Opgave 8.6).

8.6. Propositie. *Zij $T : X \to Y$ een BLO van genormeerde lineaire ruimten X en Y. Dan is T continu t.o.v. de zwakke topologieën van X en Y.*

8.7. Stelling. *Zij $T : X \to Y$ een BLO van een reflexieve Banachruimte X naar een genormeerde lineaire ruimte Y dan is het beeld onder T van de gesloten eenheidsbal in X gesloten in Y.*

Bewijs. De gesloten eenheidsbal B in X is zwak compact (Gevolg 8.5). Dus $T(X)$, het continue (Propositie 8.6) beeld van een compacte verzameling, is zwak compact in Y, dus zwak gesloten in Y, dus norm-gesloten in Y.

8.8. Gevolg. *Zij $T : X \to Y$ een BLO van een reflexieve Banachruimte X naar een genormeerde lineaire ruimte Y. Dan is T een compacte operator desda het beeld onder T van de gesloten eenheidsbal in X compact is in Y.*

8.9. Gevolg. *Zij X een reflexieve Banachruimte. Dan geldt voor elke $f \in X^*$ dat het beeld onder f van de gesloten eenheidsbal in X gelijk is aan $\{z \in \mathbb{K} : |z| \le \|f\|\}$ (dus een gesloten cirkelschijf of een gesloten interval als $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ resp. $\mathbb{R}$).*

Omgekeerd, als voor een Banachruimte X voor elke $f \in X^*$ de eigenschap in bovenstaand Gevolg geldt, dan is X reflexief (zie Corollary 2.4 in I. Singer, *Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces*, Springer-Verlag, 1970).

8.10. Opgaven.

8.1 Bewijs dat de zwakke topologie op een genormeerde lineaire ruimte X Hausdorff is.

8.2 Zij X een genormeerde lineaire ruimte. Bewijs dat de afbeeldingen $(x, y) \mapsto x + y : X \times X \to X$ en $(\alpha, x) \mapsto \alpha x : \mathbb{K} \times X \to X$ continu zijn als op X de zwakke topologie wordt genomen.

8.3 Bewijs dat een gesloten lineaire deelruimte van een genormeerde lineaire ruimte ook zwak gesloten is.

8.4 Bewijs Propositie 8.6.

8.5 Zij X een (noodzakelijk niet-reflexieve) Banachruimte met een $f \in X^* \backslash \{0\}$ zo dat het beeld $f(B)$ van de gesloten eenheidsbal B in X niet gesloten is in $\mathbb{K}$. Laat zien dat dan $f(B) = \{z \in \mathbb{K} : |z| < \|f\|\}$. Geef dan ook een zwak open overdekking van B zonder eindige deeloverdekking, wat nog eens laat zien dat in dat geval B niet zwak compact is.

8.6 Geef een $f \in X^*$ en een open overdekking van B met eigenschappen als in Opgave 8.5 meer expliciet als X een van de volgende Banachruimten is met $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

(a) $X = C([0, 1])$ (zie Opgave 7.5);
(b) $X = c_0$;
(c) $X = \{x \in l^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n \text{ bestaat}\}$.

8.7 Zij X een genormeerde lineaire ruimte. Bewijs dat de zwakke topologie op X samenvalt met de norm-topologie desda X eindig dimensionaal is. Bewijs ook dat de zwak* topologie op X^* samenvalt met de norm-topologie desda X eindig-dimensionaal is.

8.8 Zij X een oneindig-dimensionale genormeerde lineaire ruimte. Bewijs dat de gesloten eenheidsbal in X zwak gesloten is, maar dat de eenheidssfeer $\{x \in X : \|x\| = 1\}$ niet zwak gesloten is. Concludeer dat de eenheidssfeer in X^* niet zwak* gesloten is, en ook niet zwak* compact.

9. Inversie van operatoren, eigenwaarden, spectrum.

Vergeleken met de vorige versie van de syllabus zijn in dit hoofdstuk bewijzen toegevoegd van fundamentele stellingen over het spectrum van een operator. Deze bewijzen zijn ontleend aan Simmons, Introduction to topology and modern analysis, §67.

We noteren de identiteit op een vectorruimte V met I_V (of met I als er geen verwarring mogelijk is).

9.1. Definitie. Een BLO $L : V \to W$ tussen genormeerde lineaire ruimten V en W heet *rechts inverteerbaar* als er $M \in \mathcal{B}(W, V)$ bestaat (de *rechtsinverse* van L) zo dat

$$LM = I_W, \tag{9.1}$$

en *links inverteerbaar* als er $M' \in \mathcal{B}(W, V)$ bestaat (de *linksinverse* van L) zo dat

$$M'L = I_V. \tag{9.2}$$

Als (9.1) en (9.2) allebei gelden dan is $M = (M'L)M = M'(LM) = M'$, dus dan $M = M'$ en L heet *inverteerbaar* met *inverse* M.

9.2. Opmerking. Als L een operator op een eindig-dimensionale vectorruimte is die aan (9.1) of (9.2) voldoet, dan weten we dat L inverteerbaar is. In het algemeen is dit onjuist, neem de shift-operatoren uit §3.5, onderdeel 5: $L_l L_r$ is de identiteit, maar $L_r L_l$ niet!

In de rest van dit hoofdstuk is V een Banachruimte en $L : V \to V$ een BLO, ook als dit niet speciaal vermeld wordt. Verder zullen we aannemen dat we over de complexe getallen werken, dus $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Als aanvankelijk $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dan vervangen we V door $V + iV$, wat op een natuurlijke manier de structuur heeft van een Banachruimte over $\mathbb{C}$, terwijl $L \in \mathcal{B}(V, V)$ een natuurlijke uitbreiding heeft tot een complex lineaire BLO op $V + iV$. Vooral bij de stelling verderop dat het spectrum van een BLO op V niet leeg is, is de aanname $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ cruciaal.

9.3. Stelling. *Zij $L : V \to V$ een BLO op een Banachruimte V. Als $\|L\| < 1$ dan convergeert de* **Neumann-reeks** $\sum_{j=0}^{\infty} L^j := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} L^j$ *in operatornorm. Als $\sum_{j=0}^{\infty} L^j$ convergeert (en i.h.b. dus als $\|L\| < 1$), dan is $I - L$ inverteerbaar en*

$$(I - L)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} L^j. \tag{9.3}$$

Bewijs. Merk op dat $\|L^n\| \leq \|L\|^n$. Dat de partieelsommen in (9.3) een Cauchy-rij vormen als $\|L\| < 1$, volgt onmiddellijk:

$$\Big\|\sum_{j=m}^{n} L^j\Big\| \leq \sum_{j=m}^{n} \|L\|^j \leq \frac{\|L\|^m}{1 - \|L\|}.$$

Die Cauchy-rij convergeert omdat $\mathcal{B}(V, V)$ een Banachruimte is.

Neem nu aan dat $M := \sum_{j=0}^{\infty} L^j$ convergeert. Dan $\lim_{n\to\infty} L^n = 0$ en

$$(I-L)M = (I-L)\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n} L^j = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}(L^j - L^{j+1}) = I - \lim_{n\to\infty} L^{n+1} = I,$$

$$M(I-L) = \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n} L^j\right)(I-L) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}(L^j - L^{j+1}) = I - \lim_{n\to\infty} L^{n+1} = I. \qquad \square$$

9.4. Definitie. Het *spectrum* van een BLO $L : V \to V$ is de verzameling

$$\sigma(L) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - L \text{ is } \textit{niet} \text{ inverteerbaar}\}. \tag{9.4}$$

De *resolvent-verzameling* $\rho(L)$ van L is het complement in $\mathbb{C}$ van $\sigma(L)$. Een *eigenwaarde* van L is een $\lambda \in \mathbb{C}$ zo dat voor zekere $x \neq 0$ uit V geldt dat

$$Lx = \lambda x. \tag{9.5}$$

Een $x \neq 0$ waarvoor (9.5) geldt, heet een *eigenvector* van L bij de eigenwaarde λ. De verzameling eigenvectoren bij de eigenwaarde λ heet de *eigenruimte* behorend bij λ. Als x een eigenvector is bij de eigenwaarde λ, dan heet (x, λ) wel een *eigenpaar*.

9.5. Opmerkingen.

1. Met gaat eenvoudig na, dat een eigenruimte een gesloten lineaire deelruimte is.
2. Alle eigenwaarden van een BLO L zijn bevat in het spectrum: Als λ een eigenwaarde is, dan $\ker(\lambda I - L) \neq \{0\}$, dus $\lambda I - L$ niet inverteerbaar.

In het algemeen bestaat het spectrum uit meer dan alleen eigenwaarden.

9.6. Voorbeeld.

Beschouw de rechter shift-operator L_r (vgl. §3.5, onderdeel 5). Laat $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^2(\mathbb{N})$. Als $L_r(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots) = \lambda(x_1, x_2, \ldots)$, dan volgt (als $\lambda \neq 0$) dat $x_1 = 0$, dus $x_2 = 0$ en met inductie $x = 0$; als $\lambda = 0$ dan volgt $x = 0$ direct. L_r heeft dus geen eigenwaarden. We hebben al gezien dat L_r niet inverteerbaar is, dus $0 \in \sigma(L_r)$. Zie ook opgaven 9.4 en 9.5.

9.7. Stelling. *Het spectrum van een BLO $L : V \to V$ op een Banachruimte V is bevat in de gesloten schijf $\overline{B(0, \|L\|)}$ in $\mathbb{C}$.*

Bewijs. We moeten laten zien dat $\lambda I - L$ inverteerbaar is voor $|\lambda| > \|L\|$, i.e. dat $I - \lambda^{-1}L$ inverteerbaar is voor zulke λ. Dit volgt uit Stelling 9.3, omdat $\|\lambda^{-1}L| < 1$. $\square$

We zullen hieronder laten zien dat $\sigma(L)$ gesloten is in $\mathbb{C}$ en dat $\sigma(L)$ niet leeg is. Dan kunnen we definiëren:

9.8. Definitie. De kleinste $r \geq 0$ zo dat $\sigma(L) \subset \overline{B(0, r)}$ heet de *spectraalstraal* van L, notatie $r(L)$.

Dus $r(L) \leq \|L\|$. We zullen bewijzen dat $\lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{1/n}$ bestaat en gelijk is aan $r(L)$. Er bestaan operatoren L waarvoor $r(L) < \|L\|$, zie Voorbeeld 9.16 en Opgave 9.2.

9.9. Lemma. *De inverteerbare operatoren vormen een open deelverzameling van $\mathcal{B}(V,V)$.*

Bewijs. Zij L_0 inverteerbaar. Als $\|L - L_0\| < \|L_0^{-1}\|^{-1}$ dan

$$\|L_0^{-1}L - I\| = \|L_0^{-1}(L - L_0)\| \le \|L_0^{-1}\|\,\|L - L_0\| < 1,$$

dus $L_0^{-1}L = I - (I - L_0^{-1}L)$ is inverteerbaar, dus $L = L_0(L_0^{-1}L)$ is inverteerbaar. $\square$

9.10. Stelling. *Als $L \in \mathcal{B}(V,V)$ dan is $\sigma(L)$ gesloten in $\mathbb{C}$.*

Bewijs. Gezien het vorige lemma vormen de niet-inverteerbare operatoren een gesloten deelverzameling van $\mathcal{B}(V,V)$. Dan is $\sigma(L)$ het inverse beeld van deze gesloten verzameling onder de continue afbeelding $\lambda \mapsto L - \lambda I : \mathbb{C} \to \mathcal{B}(V,V)$, dus $\sigma(L)$ is een gesloten deelverzameling van $\mathbb{C}$. $\square$

In het bewijs dat $\sigma(L)$ niet leeg is, zullen we gebruiken dat $\lambda \mapsto (L - \lambda I)^{-1} : \rho(L) \to \mathcal{B}(V,V)$ een continue afbeelding is. Daartoe hebben we nodig:

9.11. Lemma. *Zij $\mathcal{B}(V,V)_{\text{inv}}$ de (open) deelverzameling van inverteerbare elementen van $\mathcal{B}(V,V)$. Dan is de afbeelding $L \mapsto L^{-1} : \mathcal{B}(V,V)_{\text{inv}} \to \mathcal{B}(V,V)_{\text{inv}}$ continu, dus een homeomorfisme.*

Bewijs. Zij $L_0 \in \mathcal{B}(V,V)_{\text{inv}}$ en $L \in \mathcal{B}(V,V)$ zo dat $\|L - L_0\| < 1/(2\|L_0^{-1}\|)$. Uit het bewijs van Lemma 9.9 volgt dat dan $L_0^{-1}L$ en L inverteerbaar zijn met $\|L_0^{-1}L - I\| < \frac{1}{2}$, dus uit Stelling 9.3 volgt dat

$$L^{-1}L_0 = (L_0^{-1}L)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - L_0^{-1}L)^n.$$

Dus

$$\begin{aligned}\|L^{-1} - L_0^{-1}\| &= \|(L^{-1}L_0 - I)L_0^{-1}\| \le \|L^{-1}L_0 - I\|\,\|L_0^{-1}\| = \|L_0^{-1}\|\,\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}(1 - L_0^{-1}L)^n\Big\| \\ &\le \|L_0^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty}\|1 - L_0^{-1}L\|^n = \frac{\|L_0^{-1}\|\,\|1 - L_0^{-1}L\|}{1 - \|1 - L_0^{-1}L\|} \le 2\|L_0^{-1}\|^2\,\|L - L_0\|.\end{aligned}$$ $\square$

9.12. Stelling. *Het spectrum $\sigma(L)$ van $L \in \mathcal{B}(V,V)$ met V een* **complexe** *Banachruimte is niet leeg.*

Bewijs. Stel dat $\sigma(L)$ leeg is. Dan bestaat $(L-\lambda I)^{-1}$ voor alle $\lambda \in \mathbb{C}$ en $\lambda \mapsto (L-\lambda I)^{-1} : \mathbb{C} \to \mathcal{B}(V,V)$ is een continue afbeelding. We zullen bewijzen dat dan $f((L - \lambda I)^{-1}) = 0$ voor alle $\lambda \in \mathbb{C}$ en voor alle $f \in \mathcal{B}(V,V)^*$. Omdat $\mathcal{B}(V,V)^*$ de punten scheidt op $\mathcal{B}(V,V)$ (zie Gevolg 6.4), zal dan $(L - \lambda I)^{-1} = 0$ voor alle $\lambda \in \mathbb{C}$, maar de inverse van een operator kan niet 0 zijn, dus we hebben een tegenspraak.

Te bewijzen dus dat $f((L-\lambda I)^{-1}) = 0$. We weten al dat de functie $\lambda \mapsto f((L-\lambda I)^{-1})$ continu is op $\mathbb{C}$. Nu laten we zien dat hij ook complex differentieerbaar is, dus een gehele analytische functie is. Inderdaad,

$$(L - \lambda I)^{-1} - (L - \mu I)^{-1} = (\lambda - \mu)\,(L - \lambda I)^{-1}\,(L - \mu I)^{-1},$$

dus

$$\lim_{\lambda\to\mu} \frac{f((L-\lambda I)^{-1}) - f((L-\mu I)^{-1})}{\lambda-\mu} = \lim_{\lambda\to\mu} f((L-\lambda I)^{-1}\,(L-\mu I)^{-1}) = f((L-\mu I)^{-2}).$$

We hebben de afschatting

$$|f((L-\lambda I)^{-1})| \le \|f\|\,\|(L-\lambda I)^{-1}\| = \|f\|\,\|(\lambda^{-1}L-I)^{-1}\|\,|\lambda|^{-1},$$

wat naar 0 gaat als $\lambda\to\infty$ in $\mathbb{C}$. Dus volgens de stelling van Liouville uit de functietheorie is de gehele analytische functie $\lambda\mapsto f((L-\lambda I)^{-1})$ identiek 0. □

We bekijken nogmaals de Neumann-reeks, nu voor $I-L/\lambda$;

$$(I-L/\lambda)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{L}{\lambda}\right)^{j}.$$

Wanneer convergeert deze reeks? Een voldoende voorwaarde is dat $\sum_{j=0}^{\infty}\|L^j\|\,|\lambda|^{-j}<\infty$, dus dat

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{\|L^j\|}{|\lambda|}^{1/j} < 1, \quad \text{ofwel} \quad |\lambda| > \limsup_{j\to\infty}\|L^j\|^{1/j}.$$

We vinden voor de spectraalstraal $r(L)\le\limsup_{j\to\infty}\|L^j\|^{1/j}$. We zullen hieronder bewijzen dat $r(L)=\limsup_{j\to\infty}\|L^j\|^{1/j}$, ja zelfs $r(L)=\lim_{j\to\infty}\|L^j\|^{1/j}$. Hiertoe eerst een lemma.

9.13. Lemma. *Als $A,B\in\mathcal{B}(V,V)$ met $AB=BA$ inverteerbaar, dan zijn A en B inverteerbaar.*

Bewijs. $AB(AB)^{-1}=I=(AB)^{-1}AB=(AB)^{-1}BA$, dus A is links en rechts inverteerbaar, dus inverteerbaar, dus $B=A^{-1}(AB)$ is ook inverteerbaar. □

9.14. Propositie. *Laat $L\in\mathcal{B}(V,V)$ (V een* **complexe** *Banachruimte). Laat $n\in\mathbb{Z}_{>0}$. Dan $\sigma(L^n)=(\sigma(L))^n$.*

Bewijs. Laat $\lambda\in\mathbb{C}$ en $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ de n-de machtswortels van λ, dus

$$L^n-\lambda I=(L-\lambda_1 I)\ldots(L-\lambda_n I),$$

waarbij alle factoren in het rechter lid met elkaar commuteren. Met behulp van het vorige lemma volgt er dat $L^n-\lambda I$ inverteerbaar is desda $L-\lambda_j I$ inverteerbaar is voor $j=1,\ldots,n$. Dus $L^n-\lambda I$ is niet inverteerbaar desda er een j is met $L-\lambda_j I$ niet inverteerbaar. □

9.15. Stelling. *Laat $L\in\mathcal{B}(V,V)$ (V een* **complexe** *Banachruimte). Dan $r(L)=\lim_{n\to\infty}\|L^n\|^{1/n}$, waarbij de limiet bestaat.*

Bewijs. Uit de voorgaande Propositie volgt er dat $r(L^n)=(r(L))^n$, dus

$$r(L)=(r(L^n))^{1/n}\le\|L^n\|^{1/n}.$$

We zullen nu bewijzen dat voor elke $\varepsilon > 0$ zal gelden dat $\|L^n\|^{1/n} < r(L) + \varepsilon$ voor n voldoende groot, waarmee de stelling bewezen zal zijn.

Als $f \in B(V,V)^*$ dan is $F : \lambda \mapsto f((L-\lambda I)^{-1})$ complex analytisch op $\rho(L)$, dus zeker op $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(L)\}$. Omdat $(L-\lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}L) = -\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n}L^n$ convergeert als $|\lambda| > \|L\|$ (zie Stelling 9.3), zal F convergente Laurent-reeks

$$f((L-\lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} f(L^n)\lambda^{-n}$$

hebben op $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|L\|\}$, dus op grond van functietheorie ook op $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(L)\}$. Neem λ met $|\lambda| > r(L)$ vast. Dan geldt voor elke $f \in B(V,V)^*$ dat $\{f(\lambda^{-n}L^n)\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ een begrensde verzameling is in $\mathbb{C}$. We kunnen $\lambda^{-n}L^n \in \mathcal{B}(V,V)$ ook opvatten als een element $f \mapsto f(\lambda^{-n}L^n)$ van $\mathcal{B}(\mathcal{B}(V,V)^*, \mathbb{C})$ met operatornorm gelijk aan de oorspronkelijke norm $\|\lambda^{-n}L^n\|$. Dus we kunnen nu de Stelling van Banach-Steinhaus (Stelling 5.5) toepassen en concluderen dat de verzameling $\{\lambda^{-n}L^n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ begrensd moet zijn in $\mathcal{B}(V,V)$, dus dat er een $C > 0$ moet zijn zo dat $\|\lambda^{-n}L^n\| \leq C$ voor alle $n \geq 0$. Neem nu $\varepsilon > 0$ en $\lambda = r(L) + \frac{1}{2}\varepsilon$. Dan $\|L^n\|^{1/n} \leq C^{1/n}(r(L) + \frac{1}{2}\varepsilon)$, wat kleiner is dan $r(L) + \varepsilon$ als n groter is dan een zekere N afhangend van ε. □

9.16. Voorbeeld. *De spectraalstraal van een Volterra-operator L in $C([0,1])$ met continue, begrensde kern is 0.*

Bewijs. Laat L gegeven zijn door de continue kern $k(x,y)$, $|k| \leq C$, $k = 0$ voor $y > x$. Dat wil zeggen:

$$(Lf)(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)\,dy = \int_0^x k(x,y)f(y)\,dy.$$

Uit de continuïteit van k volgt dat $Lf \in C([0,1])$. Er geldt voor $x \in [0,1]$ dat

$$|(Lf)(x)| = \Big|\int_0^x k(x,y)f(y)\,dy\Big| \leq \int_0^x |k(x,y)|\,\|f\|\,dy \leq xC\|f\|,$$

zodat $|(L^2f)(x)| \leq \int_0^x CyC\|f\|\,dy = \frac{x^2C^2}{2!}\|f\|$. Met inductie vinden we

$$|(L^nf)(x)| \leq \frac{x^nC^n}{n!}\|f\|,$$

dus als $n \to \infty$,

$$\|L^n\|^{1/n} \leq \frac{C}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$$

en de spectraalstraal is 0. □

Zonder bewijs vermelden we een structuurstelling voor het spectrum van compacte operatoren. Zie Rudin [1] voor een bewijs.

9.17. Stelling. *Zij K een compacte operator op een Banachruimte V. Dan is $\sigma(K)$ aftelbaar, en het enig mogelijke verdichtingspunt van $\sigma(K)$ is 0. Indien $\lambda \in \sigma(K)$, $\lambda \neq 0$, dan is λ een eigenwaarde.*

Met het oog op het volgende hoofdstuk bewijzen we wel een zwakkere versie van deze stelling:

9.18. Propositie. *Zij K een compacte operator op een Banachruimte V. Dan is de verzameling eigenwaarden van K aftelbaar met 0 als enig mogelijk verdichtingspunt. Verder heeft elke eigenwaarde $\neq 0$ eindige multipliciteit.*

Bewijs. De Propositie zal volgen als het volgende bewezen kan worden:
Als $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ een oneindige rij van lineair onafhankelijke eigenvectoren van K is met bijbehorende eigenwaarden λ_j zo dat $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots > 0$ dan $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = 0$.
Schrijf $V_j := \text{Span}(v_1, v_2, \ldots, v_j)$. Dan $(K - \lambda_j I)(V_j) \subset V_{j-1}$. Volgens Opgave 4.13 kunnen we vectoren a_j vinden zo dat $a_j \in V_j$, $\|a_j\| = 1$ en $d(a_{j+1}, V_j) = 1$. Dus als $i > j$ dan $Ka_i - Ka_j = \lambda_i a_i - (Ka_j - (K - \lambda_i I)a_i)$, dus $\|Ka_i - Ka_j\| \geq |\lambda_i|$ omdat $Ka_j - (K - \lambda_i I)a_i \in V_{i-1}$ en $d(\lambda_i a_i, V_{i-1}) = |\lambda_i|$. Als er nu $\varepsilon > 0$ zou zijn zo dat $|\lambda_i| \geq \varepsilon$ voor alle i, dan zou de rij (Ka_i) geen Cauchy-deelrij hebben, in strijd met de compactheid van de operator K. □

9.19. Opgaven.

9.1 Bepaal de eigenparen van de operator L in $L^2([-1,1])$ gegeven door

$$Lf(x) = \int_{-1}^{1} (1 - 5xy) f(y)\, dy.$$

9.2 Geef een voorbeeld van een BLO $L : V \to V$ op een eindig-dimensionale Hilbertruimte V waarvoor $r(L) < \|L\|$.

9.3 Construeer een compacte operator zonder eigenwaarden.
Aanwijzing: Wijzig de rechtershift zo dat het resultaat een limiet van operatoren van eindige rang is.

9.4 Bepaal het spectrum van de shiftoperatoren L_r en L_l.

9.5 Bepaal de eigenwaarden van L_l.

9.6 Laat $L : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$, $Lf(x) = xf(x)$. Laat zien dat L zelfgeadjungeerd is. Wat is de norm? Is L compact? Heeft L eigenwaarden? Is L surjectief, wat kun je zeggen over $R(L)$?

9.7 Zij nu meer algemeen $a \in L^\infty([0,1])$, L_a is gedefinieerd op $L^2([0,1)]$ door $L : f \to a\,f$. Onderzoek voor welke a de operator L_a eigenparen heeft. Voor welke a is L inverteerbaar, wat is L^{-1}. Onderzoek voor welke a de range van L gesloten is, (en voor welke niet).

9.8 Kan een compacte operator een inverse hebben?

9.9 Laat $D : C^2([0,1]) \to C([0,1])$, $f \mapsto f''$. Laat zien dat L gedefinieerd door

$$(Lf)(x) = \int_0^x \int_0^t f(y)\, dy\, dt,$$

een rechtsinverse is en schrijf deze als een Volterra-operator.

9.10 Zij K een compacte operator in een Banachruimte V. Zij λ een eigenwaarde van K ongelijk 0. Bewijs dat de eigenruimte bij λ eindige dimensie heeft.

9.11 Bewijs de ongelijkheid van Gronwall: Veronderstel dat u, v continu zijn op $[a, b]$, en $u \geq 0$. Indien voor zekere C geldt

$$v(t) \leq C + \int_a^t u(s)v(s)\, ds, \quad a \leq t \leq b, \tag{$*$}$$

dan geldt met dezelfde C

$$v(t) \leq Ce^{\int_a^t u(s)\, ds}.$$

Aaanwijzing: Bekijk de lineaire operator T gedefinieerd door $(Tv)(t) = \int_a^t u(s)v(s)\, ds$. Herschrijf $(*)$ als

$$(I - T)v \leq C.$$

Merk op dat T Volterra is en bereken de inverse van $I - T$.

10. Compacte zelfgeadjungeerde operatoren.

In dit hoofdstuk bestuderen we compacte zelfgeadjungeerde operatoren. Dit zijn de meest plezierige generalisaties van hermitische matrices. Uit de lineaire algebra weten we dat hermitische matrices mooie eigenschappen hebben: Zo'n matrix kan op diagonaalvorm met reële diagonaalelementen worden gebracht door conjugatie met een unitaire matrix. M.a.w., er bestaat een orthonormale basis van eigenvectoren voor de bijbehorende lineaire afbeelding en de eigenwaarden zijn reëel. We zullen zien dat hetzelfde waar is voor compacte zelfgeadjungeerde operatoren op Hilbertruimten.

In dit hoofdstuk wordt met H een Hilbertruimte bedoeld en met L een begrensde lineaire operator op H. We noteren de eenheidssfeer in H met S, d.w.z. $S := \{x \in H : \|x\| = 1\}$.

10.1. Definitie. Zij $L : H \to H$ een BLO op H. De *kwadratische vorm* Q_l van L en de *Q-norm* N_L van L zijn gedefinieerd door

$$Q_L(x) := \langle Lx, x\rangle, \qquad N_L = \sup_{x\in S} |Q_L(x)|.$$

Als $Q_L \geq 0$ dan heet L *positief*. We definiëren een partiële ordening op de BLO's in H door $L_1 \leq L_2$ als $L_2 - L_1$ positief is.

Merk op dat $\langle Lv, v\rangle \leq \|L\| \, \|v\|^2$, dus $N_L = \sup_{v\in S}\langle Lv, v\rangle \leq \|L\|$.

10.2. Propositie. *Als λ een eigenwaarde is van L, dan is $|\lambda| \leq N_L$. Als er een x_0 in S is met $N_L = |Q_L(x_0)| = \|L\|$, dan is x_0 een eigenvector van L.*

Bewijs. $Lx = \lambda x$ voor een $x \in S$ impliceert $|\lambda| = |\langle Lx, x\rangle| \leq N_L$. Wat de tweede bewering betreft, uit het gegeven volgt

$$N_L = |\langle Lx_0, x_0\rangle| \leq \|Lx_0\| \, \|x_0\| \leq \|L\| = N_L,$$

dus de ongelijkheden zijn gelijkheden en dus is $Lx_0 = \lambda x_0$ voor zekere λ, $|\lambda| = \|L\|$. □

10.3. Lemma. *Equivalent zijn :*
1. *L is zelfgeadjungeerd op H.*
2. *Q_L is reëelwaardig.*

Bewijs. $1 \Rightarrow 2$: zie Opgave 4.5. We bewijzen $2 \Rightarrow 1$:

$$\langle L(x+y), (x+y)\rangle = \langle Lx, x\rangle + \langle Ly, y\rangle + \langle Lx, y\rangle + \langle Ly, x\rangle,$$

Dus $\langle Lx, y\rangle + \langle Ly, x\rangle \in \mathbb{R}$ voor alle $x, y \in H$. Neem nu $y = v$ en $y = iv$, dan vinden we

$$\begin{aligned} \langle Lx, v\rangle + \langle Lv, x\rangle &= \langle v, Lx\rangle + \langle x, Lv\rangle \\ -i\langle Lx, v\rangle + i\langle Lv, x\rangle &= i\langle v, Lx\rangle - i\langle x, Lv\rangle. \end{aligned}$$

Vermenigvuldig tenslotte de laatste gelijkheid met i en tel hem bij de eerste op. □

Het bewijs van de volgende Propositie wordt gevraagd in Opgave 10.2.

10.4. Propositie. *Zij L zelfgeadjungeerd op H. Dan:*
(a) De eigenwaarden van L op H zijn reëel.
(b) Eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden zijn onderling loodrecht.
(c) Als X een gesloten lineaire deelruimte is van H met $L(X) \subset X$, dan $L(X^\perp) \subset X^\perp$.
(d) De eigenwaarden van een positieve operator zijn ≥ 0.

10.5. Stelling. *Voor een zelfgeadjungeerde operator L geldt $N_L = \|L\|$.*

Bewijs. $N_L \leq \|L\|$ is Propositie 10.2. We weten ook dat $|\langle Lw, w\rangle| \leq N_L \|w\|^2$. Dan vinden we met de parallellogram-identiteit:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{Re}\,\langle Lx, y\rangle = \langle Lx, y\rangle + \langle Ly, x\rangle &= \tfrac{1}{2}\big(\langle L(x+y), (x+y)\rangle - \langle L(x-y), (x-y)\rangle\big) \\ &\leq \tfrac{1}{2} N_L\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\big) = N_L\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big). \end{aligned}$$

We kiezen nu $y = rLx$, $r > 0$. dan

$$2r\|Lx\|^2 \leq N_L\big(\|x\|^2 + r^2\|Lx\|^2\big).$$

Dit geeft

$$\|Lx\|^2 \leq \frac{N_L}{2r - r^2 N_L}\|x\|^2.$$

Als $N_L = 0$ zijn we nu klaar, anders nemen we $r = 1/N_L$. □

Om er zeker van te zijn dat N_L ook echt wordt aangenomen, hebben we meer nodig.

10.6. Stelling. *Laat L zelfgeadjungeerd en compact zijn op H. Dan is er een $x_0 \in S$ zo dat $|\langle Lx_0, x_0\rangle| = \|L\|$. I.h.b. is x_0 dan eigenvector van L met eigenwaarde $\|L\|$ of $-\|L\|$.*

Bewijs. Voor $L = 0$ volgt het resultaat onmiddellijk, dus we nemen aan dat $L \neq 0$. De tweede bewering volgt direct uit de eerste bewering gezien Propositie 10.2. We gaan de eerste bewering bewijzen voor $L \neq 0$. Stelling 10.5 geeft $\|L\| = N_L$, dus er is een rij $\{x_k\}$ in S zo dat $|\langle Lx_k, x_k\rangle| \to \|L\|$. Door eventueel L door $-L$ te vervangen en een deelrij te kiezen, bereiken we dat $\lim_{k\to\infty}\langle Lx_k, x_k\rangle = \|L\|$. We zullen bewijzen dat $\{x_k\}$ een convergente deelrij heeft naar een $x_0 \in S$. Dan zal $\langle Lx_0, x_0\rangle = \|L\|$, dus zal de stelling bewezen zijn.

Nu is

$$0 \leq \big\|Lx_k - \|L\|\,x_k\big\|^2 = \|Lx_k\|^2 - 2\|L\|\,\langle Lx_k, x_k\rangle + \|L\|^2\,\|x_k\|^2. \tag{$*$}$$

Dus

$$2\|L\|\,\langle Lx_k, x_k\rangle - \|L\|^2 \leq \|Lx_k\|^2 \leq \|L\|^2,$$

waarbij het linker lid naar $\|L\|^2$ convergeert als $k \to \infty$. Er volgt dat $\lim_{k\to\infty}\|Lx_k\|^2 = \|L\|^2$. Dus $(*)$ geeft dat

$$\lim_{k\to\infty}\big\|Lx_k - \|L\|\,x_k\big\|^2 = 0. \tag{$**$}$$

Omdat L compact is, heeft $\{Lx_k\}$ een convergente deelrij, dus na $\{x_k\}$ door een deelrij te vervangen, mogen we aannemen dat $\{Lx_k\}$ convergeert naar een limiet y_0. Dan volgt uit $(**)$ dat $\lim_{k\to\infty} x_k = \|L\|^{-1} y_0$. $\square$

10.7. Lemma. *De eigenruimte bij een eigenwaarde $\lambda \neq 0$ van een compacte operator L op H is eindig-dimensionaal.*

Bewijs. (Algemener op een Banachruimte reeds bewezen in Propositie 9.18.) Kies een orthonormale basis $e_1, e_2, \ldots$ van de eigenruimte behorend bij λ. Omdat L compact is, heeft $Le_j = \lambda e_j$ een convergente deelrij, maar $\|e_j - e_k\|^2 = 2$, dus de rij breekt af en de eigenruimte is eindig-dimensionaal. $\square$

10.8. Spectraalstelling voor compacte zelfgeadjungeerde operatoren. *Zij L een compacte zelfgeadjungeerde operator op de Hilbertruimte H. Dan bestaan er een eindig of aftelbaar orthonormaal stelsel $\{e_i\}$ en $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zo dat*

$$Lx = \sum_i \lambda_i \langle x, e_i \rangle \, e_i. \tag{10.1}$$

Als het stelsel oneindig is, convergeert de rij $\{\lambda_i\}$ naar 0. De operatoren gedefinieerd door de partieelsommen convergeren in operatornorm naar L.

Bewijs. Neem aan dat $L \neq 0$, anders is er niets te bewijzen. Bekijk voor $k = 1, 2, \ldots$ de volgende bewering B_k:

$H = Y_k \oplus X_k$ *(orthogonale directe som van gesloten lineaire deelruimten) waarbij* $Y_k = \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_k)$ *opgespannen door een orthonormaal stelsel van eigenvectoren e_j van L met bijbehorende eigenwaarden λ_j zo dat $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_k| > 0$ en $\left\|L|_{X_k}\right\| \leq |\lambda_k|$.*

Gezien Propositie 10.6 en Propositie 10.4(c) geldt bewering B_1 en volgt bewering B_{k+1} uit bewering B_k als $L|_{X_k} \neq 0$, waarbij de eigenvectoren $e_1, \ldots, e_k$ uit bewering B_k weer terugkomen in bewering B_{k+1}. Als bewering B_k geldt dan kunnen we voor $x \in H$ schrijven:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle \, e_i + x_k \qquad (x_k \in X_k), \tag{10.2}$$

waarbij x_k het beeld van x is onder de orthogonale projectie van X op X_k. Er geldt dat $\|x_k\| \leq \|x\|$.

Met inductie zien we dus dat een van de volgende twee mogelijkheden zich zal voordoen:

1. Er is een k met $L|_{X_k} = 0$. Bekijk (10.2) voor die k, dan

$$Lx = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle \, Le_i + Lx_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i.$$

2. Bewering B_k geldt voor alle k, dus we hebben een aftelbaar oneindig orthonormaal stelsel van eigenvectoren $e_1, e_2, \ldots$ en bijbehorende eigenvectoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ met

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots > 0$. Wegens Propositie 9.18 (of zie Opgave 10.5) convergeert de rij $\{\lambda_k\}$ naar 0. Voor $x \in H$ gegeven door (10.2) vinden we:

$$Lx = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle Le_i + Lx_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i + Lx_k.$$

Voor elke $\epsilon > 0$ is er een k_0 zo dat $\left\| L|_{X_k} \right\| \leq |\lambda_k| < \epsilon$ als $k \geq k_0$, dus $\|Lx_k\| \leq \varepsilon \|x_k\| \leq \varepsilon \|x\|$ als $k \geq k_0$. Dus de partieelsommen convergeren in operatornorm en formule (10.1) geldt. □

10.9. Gevolg. *Iedere compacte zelfgeadjungeerde operator op H is limiet van zelfgeadjungeerde operatoren van eindige rang.*

10.10. Opgaven.

10.1 Welke multiplier-operatoren zijn positief? Geef een voorbeeld van een positieve operator zonder eigenwaarden.

10.2 Bewijs Propositie 10.4.

10.3 Zij L zelfgeadjungeerd op H. Bewijs dat $N_{L^2} = \|L\|^2$. Concludeer dat $\|L^2\| = \|L\|^2$. Is dit laatste ook waar zonder zelfgeadjungeerdheid?

10.4 Zij L zelfgeadjungeerd op H en zij $x_0 \in S$. Bewijs dat equivalent zijn: (i) $\|Lx\|$ neemt een maximum voor $x \in S$ aan in x_0; (ii) $|Q_L|$ neemt een maximum op S aan in x_0; (iii) x_0 is eigenvector van L^2 met eigenwaarde $\|L\|^2$; (iv) x_0 is eigenvector van L met eigenwaarde $\pm\|L\|$.

10.5 Geef een korter bewijs van Propositie 9.18 in het geval dat K een compacte zelfgeadjungeerde operator is op een Hilbertruimte door daar in het bewijs te gebruiken dat we de rij $\{v_j\}$ van eigenvectoren als orthonormaal stelsel kunnen nemen.

10.6 Zij L zelfgeadjungeerd op H. Bewijs: L^2 compact $\Rightarrow$ L compact. Is dit ook waar zonder zelfgeadjungeerdheid?

10.7 Zij L positief compact op H. Laat zien dat er voor iedere $m \in \mathbb{N}$ een positieve, compacte M bestaat met $M^m = L$.

10.8 Zij L zelfgeadjungeerd, compact. Laat zien dat er voor iedere $m \in \mathbb{N}$ een compacte M bestaat met $M^m = L$.

10.9 Geef een voorbeeld van een (compacte) operator met $N_L \neq \|L\|$.

10.10 Zij L een compacte operator in H. Schrijf L als $A + iB$, met A, B compact zelfgeadjungeerd. Laat zien dat L limiet is van operatoren van eindige rang.

10.11 Zij $L : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$, $Le_{2n} = (1/n)\, e_{2n-1}$, $Le_{2n-1} = (1/n)\, e_{2n}$. Bewijs dat L compact zelfgeadjungeerd is en bepaal de eigenparen.

10.12 Laat (x_1, λ_1) en (x_2, λ_2) eigenparen met verschillende eigenwaarden van een zelfgeadjungeerde BLO L zijn. Laat zien dat $x_2 \in R(L - \lambda_1 I)$ en concludeer uit stelling 4.11 $x_2 \perp x_1$.

10.13 Zij X een compacte zelfgeadjungeerde operator in een Hilbertruimte. Bewijs dat e^X (zie Opgave 4.9) een positieve operator is en dat $e^X - I$ compact zelfgeadjungeerd is en druk het spectrum van e^X uit in dat van X.

10.14 De operatoren M en N zijn compact en zelfgeadjungeerd op een Hilbertruimte H. Bewijs de volgende equivalentie:

$$MN = NM$$

$$\Longleftrightarrow$$

Er bestaat een orthonormale basis van H bestaande uit gemeenschappelijke eigenvectoren van M en N.

11. Het Fredholm-alternatief.

We bekijken eerst enige consequenties van de spectraalstelling (Stelling 10.8).

11.1. Stelling. *Laat L een compacte zelfgeadjungeerde operator op H zijn met orthonormaal stelsel eigenvectoren $\{e_i\}$ en bijbehorende eigenwaarden $\lambda_i \neq 0$ als in Stelling 10.8. Laat $\{f_j\}$ een orthonormale basis vormen voor* Ker$L$. *Dan vormt het stelsel $\{e_i\} \cup \{f_j\}$ een orthonormale basis voor H.*

Bewijs. We hebben $R(L) \perp \mathrm{Ker}L$, dus $e_i \perp f_j$ voor alle i, j, dus $A := \{e_i\} \cup \{f_j\}$ is een orthonormaal stelsel. Veronderstel dat $x \perp A$, dan is $Lx = \sum \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i = 0$, dus $x \in \mathrm{Ker}L$ en omdat $x \perp \{f_j\}$ is $x = 0$. Het stelsel A is dus maximaal, en daarmee een orthonormale basis. □

11.2. Gevolg. $H = \overline{R(L)} \oplus \mathrm{Ker}L$.

11.3. Opmerking. Als de standaardrij niet eindig is, dan is $R(L)$ *niet* gesloten in H. (Maar het beeld onder L van de gesloten eenheidsbal is wel gesloten, zie Opgave 4.14.) Immers, omdat $\lambda_i \to 0$, is er $(t_1, t_2, \ldots) \notin l^2(\mathbb{N})$ met $(\lambda_1 t_1, \lambda_2 t_2, \ldots) \in l^2(\mathbb{N})$. Nu is $\sum \lambda_i t_i e_i \in \overline{R(L)} \setminus R(L)$.

Als L bovendien injectief is, dan volgt er, samen met Gevolg 11.2, dat $R(L)$ dicht ligt in H, maar niet gelijk is aan H.

Zij X een Banachruimte, L een BLO op X, $\lambda \in \mathbb{C}$ en $g \in X$. De abstracte *Fredholm-vergelijking* is de volgende vergelijking met onbekende $u \in X$:

$$(L - \lambda I)u = g. \tag{11.1}$$

Bekijk eerst eens het "lineaire algebra" geval $X := \mathbb{C}^n$, $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Het is duidelijk dat er zich twee mogelijkheden voordoen:

1. λ is geen eigenwaarde van L. Dan is $L - \lambda I$ inverteerbaar en voor iedere g heeft (11.1) precies één oplossing.
2. λ is wel een eigenwaarde van L. Dan is $L - \lambda I$ niet injectief, dus ook niet surjectief. In het algemeen zal $g \notin R(L - \lambda I)$ en is er dus geen oplossing. Anderzijds als $g \in R(L - \lambda I)$, dan zijn er veel oplossingen: als u een oplossing is van (11.1) is $u + x$ het ook voor iedere eigenvector x bij eigenwaarde λ.

Het beschreven verschijnsel doet zich ook voor bij bepaalde soorten operatoren op Banachruimten en heet dan het *Fredholm-alternatief*.

11.4. Stelling. *Voor een compacte zelfgeadjungeerde operator L op een Hilbertruimte H en voor $\lambda \neq 0$ geldt het Fredholm-alternatief.*

Bewijs. Neem de orthonormale stelsels $\{e_i\}$ en $\{f_j\}$ en de eigenwaarden $\lambda_i \neq 0$ als in Stelling 11.1. Dan geldt volgens Stelling 10.8:

$$Lx = \sum \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i. \tag{11.2}$$

Als u een oplossing is van (11.1), dan krijgen we na substitutie van (11.2) door het nemen van inproduct met e_i, resp. f_j de volgende vergelijkingen voor de Fourier-coëfficiënten van u:

$$(\lambda_i - \lambda)\langle u, e_i\rangle = \langle g, e_i\rangle, \tag{11.3a}$$
$$-\lambda\langle u, f_j\rangle = \langle g, f_j\rangle. \tag{11.3b}$$

Omgekeerd, als $u \in H$ en de Fourier-coëfficiënten van u voldoen aan (11.3a) en (11.3b), dan voldoet u aan (11.1).
We onderscheiden weer twee gevallen:

1. $\lambda \notin \{\lambda_i\} \cup \{0\}$. Bedenk dat $\{\lambda_i\}$ geen andere limietpunten dan 0 heeft. Dan is er een $C > 0$ zo dat $|\lambda_i - \lambda| > C$ voor alle i . De vergelijkingen (11.3a) en (11.3b) voor de Fourier-coëfficiënten $\langle u, e_i\rangle$ en $\langle u, f_j\rangle$ hebben nu precies één oplossing:

$$c_i := \langle u, e_i\rangle = \frac{\langle g, e_i\rangle}{\lambda_i - \lambda},$$
$$d_j := \langle u, f_j\rangle = -\frac{\langle g, f_j\rangle}{\lambda}.$$

   Hieruit volgt dat er hoogstens één oplossing u van (11.1), en dat deze geschreven kan worden als
$$u = \sum_i c_i e_i + \sum_j d_j f_j,$$
   mits deze vector in H ligt. Dat is inderdaad het geval, want $|c_i| < C^{-1}|\langle g, e_i\rangle|$ en $|d_i| < |\lambda|^{-1}|\langle f, e_i\rangle|$, dus de Fourier-coëfficiënten vormen rijtjes in l^2, waardoor $u \in H$.
2. $\lambda = \lambda_i$ voor zekere i. Laat W de eigenruimte zijn behorend bij λ. Er zijn twee mogelijkheden
   a. $g \perp W$ ofwel $\langle g, e_j\rangle = 0$ voor alle j met $\lambda_j = \lambda$. Dan is het stelsel (11.3a), (11.3b) nog steeds oplosbaar, maar de (eindig veel) Fourier-coëfficiënten $\langle u, e_j\rangle$ $(\lambda_j = \lambda)$ zijn niet bepaald en vrij te kiezen. Als bij 1. construeren we een oplossing $u \in H$. Echter voor iedere $x \in W$ is $u + x$ ook een oplossing van (11.1).
   b. Als $g \not\perp W$ dan is het stelsel (11.3a) niet meer oplosbaar. Er is dan dus ook geen oplossing van (11.1).

Hiermee is het Fredholm alternatief voor L en $\lambda \neq 0$ bewezen. □

11.5. Gevolg (van het bewijs). *Het spectrum van een compacte zelfgeadjungeerde operator L in H bestaat precies uit de afsluiting van de verzameling eigenwaarden.*

Bewijs. Dit geldt duidelijk als H eindig-dimensionaal is. Neem aan dat H oneindig-dimensionaal is en pas Stelling 10.8 toe. Als er dan eindig veel eigenwaarden zijn, is 0 ook een eigenwaarde, en anders is 0 zeker het enige limietpunt van de eigenwaarden. Omdat het spectrum gesloten is en de eigenwaarden bevat, hoeven we alleen te bewijzen, dat als $\lambda \neq 0$ en geen eigenwaarde is, de operator $L - \lambda I$ inverteerbaar is. Uit het bewijs van de vorige stelling volgt dat deze operator injectief en surjectief is, dus met Stelling 5.6

(van de open afbeelding) is hij inverteerbaar. Overigens geven de vergelijkingen voor de Fourier-coëfficiënten de inverse M expliciet:

$$Mg = \sum_i \frac{\langle g, e_i \rangle}{\lambda_i - \lambda} e_i - \sum_j \frac{\langle g, f_j \rangle}{\lambda} f_j.$$

Hieraan zien we ook onmiddellijk dat deze begrensd is. □

11.6. Opgaven.

11.1 Laat L een positieve compacte operator zijn op een Hilbertruimte H. De eigenwaarden zijn in afnemende grootte: $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$. Bewijs dat

$$\lambda_1 = \min_{V_1} \max_{\substack{x \perp V_1 \\ x \in S}} \langle Lx, x \rangle,$$

waarbij V_1 loopt over alle 1-dimensionale deelruimten van H. Bewijs meer algemeen dat

$$\lambda_j = \min_{V_j} \max_{\substack{x \perp V_j \\ x \in S}} \langle Lx, x \rangle,$$

waarbij V_j loopt over alle j-dimensionale deelruimten van H.

11.2 Gebruik de vorige opgave om te bewijzen:

a. Als $L_1 \geq L_2$ positieve compacte operatoren zijn, met eigenwaarden in afnemende grootte $\lambda_0^1, \lambda_1^1, \lambda_2^1, \ldots$, resp. $\lambda_0^2, \lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots$. Dan geldt voor alle j dat $\lambda_j^1 \geq \lambda_j^2$.

b. Indien nu $\|L_1 - L_2\| < \epsilon$, dan ook $\lambda_j^1 - \lambda_j^2 < \epsilon$.

11.3 Onderzoek hoeveel van de resultaten uit Oppgave 11.1 en 11.2 overblijft indien de operatoren compact zelfgeadjungeerd zijn, en ten minste p positieve eigenwaarden hebben.

11.4 Beschouw de volgende operatoren op $L^2([0,1])$:

$$Lf(x) := \int_0^1 \cos(xy)\, f(y)\, dy$$

$$Mf(x) := \int_0^1 \left(1 - \frac{(xy)^2}{2}\right) f(y)\, dy$$

a. Bewijs dat M van eindige rang is en bepaal de eigenwaarden. (Helaas zijn deze niet erg mooi.)

b. Laat zien dat $\|L - M\| \leq 1/200$. Je mag gebruiken dat $|\cos t - 1 + t^2/2| \leq t^4/24$.

c. Schat de grootste eigenwaarde van L.

11.5 Laat L een injectieve compacte positieve operator zijn op H. Kies $u_0 \in H$ ongelijk 0. Laat $u_n = Lu_{n-1}$. Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\langle u_n, u_n\rangle}{\langle u_{n-1}, u_n\rangle}$$

bestaat en bereken deze. Waarop berust het gebruik van bovenstaande quotienten als benadering voor de grootste eigenwaarde?

12. Sturm-Liouville problemen.

12.1. Definitie. Een *Sturm-Liouville probleem* is de opgave om de oplossing u op $[a, b]$ te vinden van de inhomogene lineaire differentiaalverglijking van tweede orde

$$Lu := -(pu')' + qu = g \tag{12.1}$$

met homogene lineaire randvoorwaarden

$$\lambda_1 u'(a) + \mu_1 u(a) = 0, \tag{12.2a}$$
$$\lambda_2 u'(b) + \mu_2 u(b) = 0. \tag{12.2b}$$

Hier nemen we aan dat $p \in C^1([a, b])$ en strikt positief, $q \in C([a, b])$ en reëelwaardig, en dat $g \in L^2([a, b])$. Wat betreft de coëfficiënten in de randvoorwaarden nemen we aan dat $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. We nemen bovendien aan dat een oplossing van $Lu = 0$ onder randvoorwaarde (12.2a) en met $(u(a), u'(a)) \neq (0, 0)$ (zo'n oplossing is uniek op constante factor $\neq 0$ na), niet tevens voldoet aan randvoorwaarde (12.2b).

We kunnen L als lineaire operator beschouwen op een geschikte lineaire deelruimte $D = D(L)$ van $L^2([a, b])$ naar $L^2([a, b])$. Geschikt wil zeggen dat L en de randvoorwaarden goed gedefinieerd zijn op die deelruimte, dat de randvoorwaarden er gelden, en dat L surjectief afbeeldt op $L^2([a, b])$. De laatste aanname in Definitie 12.1 maakt dat L zeker injectief zal zijn.

Op de deelruimte van functies $u \in C^2([a, b])$ zo dat u voldoet aan randvoorwaarden (12.2a), (12.2b) is L zeker goed gedefinieerd, maar beeldt niet surjectief af op $L^2([a, b])$. Ook is hij daar onbegrensd (ga na). Uitbreidingen van L tot grotere verzamelingen zullen dus zeker ook onbegrensd zijn.

12.2. Definitie. We nemen voor $D(L)$ de ruimte van alle $u \in C^1([a, b])$ waarvoor u' b.o. op $[a, b]$ differentieerbaar is en $u'' \in L^2([a, b])$ en $u'(x) - u'(a) = \int_a^x u''(y)\, dy$, en zo dat u aan de randvoorwaarden (12.2a), (12.2b) voldoet. Dan is L een goed gedefinieerde injectieve lineaire afbeelding van $D(L)$ naar $L^2([a, b])$.

Elementaire voorbeelden van Sturm-Liouville problemen krijgen we met $Lu = -u''$ op $[0, 1]$, bijv. $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, zie Opgave 12.2. Echter, met de randvoorwaarden $u'(0) = 0$, $u'(1) = 0$ is L niet injectief, maar wel L_ε gegeven door $L_\varepsilon u = -u'' + \varepsilon u$ voor $\varepsilon > 0$ klein. Zie Opgave 12.3.

We zullen een expliciete begrensde lineaire operator T op $L^2([a, b])$ vinden zo dat $R(T) \subset D(L)$ en $LT = I$, d.w.z. T is een rechts invers van L. Dan volgt dat $L(TL - I) = 0$, dus wegens de injectiviteit van L volgt er dat $TL = I$. Dus T is een tweezijdig invers van L. Dus L beeldt $D(L)$ bijectief af op $L^2([a, b])$ en T beeldt $L^2([a, b])$ bijectief af op $D(L)$.

De expliciete vorm van T zal in eerste instantie wat uit de lucht komen vallen. We hebben wat voorbereidng nodig. Uit de theorie van gewone differentiaalvergelijkingen volgt dat de differentiaalvergelijking $Lu = 0$ samen met randvoorwaarde (12.2a) een 1-dimensionale oplossingsruimte heeft met oplossingen in $C^2([a, b])$, zeg opgespannen door een functie f_1. Hetzelfde geldt voor $Lu = 0$ samen met randvoorwaarde (12.2b). Laat die oplossingsruimte opgespannen zijn door een functie f_2. Voor de existentie van deze oplossingen gebruiken we essentieel dat $p(x) \neq 0$ voor $x \in [a,b]$, want $p(x) > 0$. Ook zijn f_1 en f_2 reëelwaardig omdat p en q dat zijn.

Merk op dat de functie $p(f_2 f_1' - f_1 f_2')$ afgeleide indentiek 0 heeft (gebruik $Lf_1 = 0 = Lf_2$ met de expliciete uitdrukking voor L in (12.1)). Dus

$$p(f_2 f_1' - f_1 f_2') = C \text{ (constant) op } [a,b]$$

met $C \neq 0$, want anders zou $p(f_2 f_1' - f_1 f_2') = 0$ in a, dus $f_2(a) f_1'(a) - f_1(a) f_2'(a) = 0$ (omdat $p(a) > 0$), dus $(f_1(a), f_1'(a))$ en $(f_2(a), f_2'(a))$ zijn veelvouden van elkaar, dus de oplossingen f_1 en f_2 van $Lu = 0$ zijn veelvouden van elkaar, dus voldoen ook allebei aan randvoorwaarde (12.2b). Dit is in strijd met de laatste aanname in Definitie 12.1.

We definiëren nu

$$(Tf)(x) := \int_a^b G(x,y)\, f(y)\, dy \quad (f \in L^2([a,b])) \tag{12.3}$$

met

$$G(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{C} f_1(x) f_2(y) & \text{als } x < y, \\ \frac{1}{C} f_1(y) f_2(x) & \text{als } x > y. \end{cases} \tag{12.4}$$

De integraalkern G wordt een *Green-functie* genoemd. Merk op dat G continu is op $[a,b] \times [a,b]$, dus zeker L^2. Dus T is een Hilbert-Schmidt operator op $L^2([a,b])$ en daarom compact (zie Voorbeeld 3.4 en Opgave 4.3). Omdat G reëelwaardig is en $G(x,y) = G(y,x)$, hebben we $\overline{G(x,y)} = G(y,x)$, dus T is zelfgeadjungeerd (zie Opgave 4.4). Substitutie van (12.4) in (12.3) geeft:

$$(Tf)(x) = \frac{f_2(x)}{C} \int_a^x f_1(y)\, f(y)\, dy + \frac{f_1(x)}{C} \int_x^b f_2(y)\, f(y)\, dy. \tag{12.5}$$

Ogenschijnlijk heeft Tf een afgeleide in $L^2([a,b])$ welke niet noodzakelijk nogmaals differentieerbaar is. Maar als we de differentiatie van Tf expliciet uitvoeren dan krijgen we:

$$(Tf)'(x) = \frac{f_2'(x)}{C} \int_a^x f_1(y)\, f(y)\, dy + \frac{f_1'(x)}{C} \int_x^b f_2(y)\, f(y)\, dy. \tag{12.6}$$

Dus $(Tf)'$ is continu en b.o. differentieerbaar met afgeleide in $L^2([a,b])$. Uit (12.5) en (12.6) vinden we al dat Tf aan de randvoorwaarden (12.2a), (12.2b) voldoet, omdat f_1 aan (12.2a) en f_2 aan (12.2b) voldoet. Ook vinden we uit (12.6):

$$\begin{aligned} \big(p(Tf)'\big)'(x) = \frac{(pf_2')'(x)}{C} \int_a^x f_1(y)\, f(y)\, dy + \frac{(pf_1')'(x)}{C} \int_x^b f_2(y)\, f(y)\, dy \\ - \frac{p(x)\big(f_1'(x) f_2(x) - f_2'(x) f_1(x)\big) f(x)}{C}. \end{aligned} \tag{12.7}$$

De laatste term is gelijk aan $-f(x)$. Nu volgt uit (12.5) en (12.7) dat $L(Tf) = f$, omdat $Lf_1 = 0 = Lf_2$.

We hebben dus bewezen:

12.3. Stelling. *De operator L, gegeven door Definitie 12.1, is een lineaire bijectie van $D(L)$, gegeven door Definitie 12.2, naar $L^2([a,b])$. Dan is T, gegeven door (12.3), (12.4), de inverse afbeelding van L, en T is een zelfgeadjungeerde compacte lineaire operator op $L^2([a,b])$, injectief en met $R(T) = D(L)$.*

Uit Stelling 10.8, samen met de injectiviteit van T, volgt dat er een orthonormale basis $\{f_i\}$ van $L^2([a,b])$ is bestaande uit eigenvectoren f_i van T met bijbehorende eigenwaarden μ_i die reëel en $\neq 0$ zijn. Omdat $L^2([a,b])$ een oneindig-dimensionale Hilbertruimte is, moet deze basis oneindig zijn, en moet de rij $\{\mu_i\}$ volgens Stelling 10.8 dus convergeren naar 0. Omdat $\mu_i f_i = T f_i \in D(L)$, zullen de f_i in $D(L)$ liggen. Dus $D(L)$ is dicht in $L^2([a,b])$, omdat de f_i een orthonormale basis van $L^2([a,b])$ vormen. (Maar het kan ook direct uit de definitie van $D(L)$ worden ingezien dat $D(L)$ dicht ligt in $L^2([a,b])$.)

Omdat L de inverse van T is, zijn de volgende twee uitspraken equivalent voor $0 \neq f \in D(L)$ en $0 \neq \mu \in \mathbb{C}$: (a) $Tf = \mu f$; (b) $Df = \mu^{-1} f$. Dus er volgt uit Stelling 12.3:

12.4. Stelling. *Zij $L : D(L) \to L^2([a,b])$ gegeven door Definitie 12.1 en 12.2. Dan is er een orthonormale basis $\{f_i\}$ van $L^2([a,b])$, gelegen binnen $D(L)$, die bestaat uit eigenvectoren f_i van L met bijbehorende eigenwaarden λ_i die reëel en $\neq 0$ zijn, en zo dat $|\lambda_i| \to \infty$ als $i \to \infty$.*

Merk op dat iedere eigenwaarde van L voorkomt in de rij λ_i, maar hoogstens eindig vaak: alle eigenruimtes van L zijn eindig-dimensionaal.

12.5. Een heuristische afleiding van de uitdrukking voor de Green-functie.

We zullen nu aannemelijk maken dat voor een operator T van de vorm (12.3) de integraalkern G door (12.4) gegeven moet zijn, wil gelden dat $R(T) \subset D(L)$ en $LT = I$. Laten we alvast aannemen dat voor elke y de functie $x \mapsto G(x,y)$ continu is op $[a,b]$ en twee keer continu differentieerbaar is op $[a,y]$ en op $[y,b]$, met een mogelijke sprong van $x \mapsto G_x(x,y)$ bij $x = y$. We schrijven $G(x,y) = G_-(x,y)$ als $x < y$ en $G(x,y) = G_+(x,y)$ als $x > y$. De afgeleiden $(G_-)_x(x,y)$ en $(G_+)_x(x,y)$ moeten voor $x = y$ als linker resp. rechter afgeleide worden opgevat. Nu vinden we formeel (en ook rigoureus) dat

$$\begin{aligned} (Tf)'(x) &= \int_a^b G_x(x,y)\, f(y)\, dy, \\ (p(Tf'))'(x) &= \int_a^b (pG_x)_x(x,y)\, f(y)\, dy + p(x)\big((G_+)_x(x,x) - (G_-)_x(x,x)\big) f(x). \end{aligned}$$

Tf moet voldoen aan de randvoorwaarden (12.3a), (12.3b) en aan $L(Tf) = f$, dus voor alle $f \in L^2([a,b])$ moet gelden:

$$\begin{aligned} &\int_a^b (\lambda_1 G_x(a,y) + \mu_1 G(a,y))\, f(y)\, dy = 0, \\ &\int_a^b (\lambda_2 G_x(b,y) + \mu_2 G(b,y))\, f(y)\, dy = 0, \\ &\int_a^x (L_x G_+)(x,y)\, f(y)\, dy + \int_x^b (L_x G_-)(x,y)\, f(y)\, dy \\ &\qquad\qquad + p(x)\big((G_-)_x(x,x) - (G_+)_x(x,x)\big) f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Hieraan is zeker voldaan als geldt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 (G_-)_x(a,y) + \mu_1 G_-(a,y) &= 0, \qquad (L_x G_-)(x,y) = 0,\\ \lambda_2 (G_+)_x(b,y) + \mu_2 G_+(b,y) &= 0, \qquad (L_x G_+)(x,y) = 0,\\ p(x)\big((G_-)_x(x,x) - (G_+)_x(x,x)\big) &= 1. \end{aligned}$$

De eerste twee vergelijkingen leveren

$$G_-(x,y) = f_1(x) g_1(y), \qquad G_+(x,y) = f_2(x) g_2(y)$$

met f_1, f_2 zoals ingevoerd in de tweede alinea na Definitie 12.2 en met g_1, g_2 nog te bepalen. Dan geeft de derde vergelijking dat

$$p(x)(f_1'(x) g_1(x) - f_2'(x) g_2(x)) = 1$$

en de continuïteit van $x \mapsto G(x,y)$ voor $x = y$ geeft dat

$$f_1(x) g_1(x) - f_2(x) g_2(x) = 0.$$

Zo hebben we een stelsel van twee lineaire vergelijkingen in $g_1(x)$ en $g_2(x)$ dat we uniek kunnen oplossen met $g_1(x) = f_2(x)/C$ en $g_2(x) = f_1(x)/C$, waarmee we opnieuw (12.4) hebben verkregen.

12.6. Opgaven.

12.1 Formuleer en bewijs analoga van opgaven 11.1–11.3 voor zelfgeadjungeerde Sturm-Liouville operatoren.

12.2 Beschouw de Sturm-Liouville operator $Lu = -u''$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$. Bepaal de Green-functie en de eigenparen. Idem voor $Lu = -u''$, $u(0) = 0$, $u(1) = 2u'(1)$ en voor $Lu = -u''$, $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$.

12.3 Beschouw de Sturm-Liouville operator $Lu = -u''$, $u'(0) = 0$, $u'(1) = 0$. Laat zien dat deze operator niet injectief is. Wat zijn de eigenparen van L? Laat nu $L_\varepsilon u = -u'' + \varepsilon u$, $u'(0) = 0$, $u'(1) = 0$. Ga na voor welke $\varepsilon > 0$ L_ε injectief is. Bepaal voor die ε de Green-functie G_ε en de inverse T_ε van L_ε. Laat zien dat $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} T_\varepsilon f$ bestaat als $f \in L^2([a,b])$ en $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$, en gegeven wordt door

$$\begin{aligned} (Tf)(x) &= \tfrac{1}{2} \int_0^x (1 - 2x + x^2 + y^2) f(y)\, dy + \tfrac{1}{2} \int_x^1 (1 - 2y + x^2 + y^2) f(y)\, dy\\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^1 y^2 f(y)\, dy + \int_x^1 (x - y) f(y)\, dy. \end{aligned}$$

Leid uit bovenstaande formule voor T ook direct, zonder de limietovergang te gebruiken, af dat T een compacte zelfgeadjungeerde operator is op het orthoplement in $L^2([0,1])$ van de constante functies, en dat T bijectief afbeeldt op het orthoplement van de constante functies in $D(L)$ en daar L als inverse operator heeft.

12.4 Gebruik een Sturm-Liouville operator om te laten zien dat

$$\{\cos x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 4x, \ldots\}$$

een orthogonale basis voor $L^2(-\pi/2, \pi/2)$ vormt.

12.5 Tracht een vergelijking op te stellen voor een strak gespannen snaar, bevestigd in punten a, b op de x-as, onderworpen aan een uitwendige verticale kracht $F(x)$ (afhankelijk van de plaats), een terugduwende kracht $-q(x)u(x)$ en met een spanning in de snaar van $p(x)$. Antwoord:

$$-(pu')' = F - qu, \quad u(a) = u(b) = 0.$$

(Oefent men F uit op een ideale snaar, dan zijn p en q constant.) Geef een fysische interpretatie van de Green-functie.

12.6 Laat zien dat een trillende snaar als boven, met specifieke massa 1 en $F = 0$ aan de vergelijking

$$-\frac{\partial}{\partial x}\Big(p(x)\, u_x(x,t)\Big) + q(x)u(x,t) = -u_{tt}(x,t), \quad u(a,t) = u(b,t) = 0$$

voldoet. Interpreteer de eigenwaarden van de geassocieerde Sturm-Liouville operator in termen van eigenfrequenties van de snaar, door scheiding van variabelen of door op $u(x,t)$ een Fouriertransformatie naar t toe te passen. Onderzoek wat er gebeurt met deze frequenties, indien men de spanning in de snaar vergroot of de lengte van de snaar wijzigt.