Chaos

Geen jargon, bezwoer Peter me, of hij zou eigenhandig dit stukje herschrijven. Toch wil ik niet alleen schrijven over brulkikkers en zeven-minutenregels. Ik wil proberen iets van mijn fascinatie voor de theorie van dynamische systemen over te brengen. Dit is het vakgebied waarin ik als universitair docent mijn onderzoek verricht.

Laat ik de vroege geschiedenis van dynamische systemen, met Poincaré en Birkhoff, overslaan en meteen naar de moderne tijd gaan. Veel vroeger werk was overigens in de vergetelheid geraakt en is de afgelopen decennia herontdekt. Het woord chaos is in de wiskunde geïntroduceerd (in een artikel verschenen in 1975) door de Amerikaan Jim Yorke, verder bekend om zijn tot sandalen verknipte gymschoenen en rode sokken. Yorke heeft een indrukwekkend wetenschappelijk oeuvre. Wie van hem een herdruk van een artikel wil hebben, moet zich bij zijn secretaresse vervoegen. Zij gaat aan de hand van lijsten na in welke lade van welke kast de gewenste herdruk zich bevindt. Chaos betekent dat kleine fouten in begincondities na verloop van tijd groter worden, zodat de uitkomsten bij herhaald uitvoeren van het proces onbetrouwbaar worden. Dit geeft een zekere onvoorspelbaarheid, een randomgedrag, in een op zich deterministisch systeem. In het Engels heet dit 'sensitive dependence on initial conditions'. Als bijvoorbeeld met elke berekening van een getal de fout in de waarde achter de komma twee keer zo groot wordt, dan is na 20 berekeningen deze fout meer dan een miljoen keer zo groot geworden. In dit voorbeeld wordt een afbeelding herhaaldelijk toegepast, namelijk de afbeelding $x \mapsto 2x \bmod 1$ die aan een getal x tussen 0 en 1 toevoegt de waarde achter de komma van $2x$. Een mooiere afbeelding die eenzelfde fenomeen laat zien, is de logistische afbeelding $x \mapsto 4x(1-x)$. Hier is het minder duidelijk hoe snel een fout groter wordt. Het in detail begrijpen van de manier waarop dit gebeurt, heeft vele wiskundigen geïntrigeerd. Fieldsmedaillewinnaars als Jack Milnor, Steve Smale en William

Thurston hebben hieraan bijgedragen. Deze drie mensen zijn overigens van oorsprong meetkundigen. Wie weet speelt zo'n factor een rol in de ontwikkeling van een vakgebied: in het dynamische systemenonderzoek bestaat een grote meetkundige school. Het is zeker interessant om te zien hoe toevallige factoren de richting van onderzoek mede bepalen. Nu zijn bijvoorbeeld 'gedomineerde splittingen' (ik zal niet uitleggen waar dat om gaat) een hot item. Naar mijn gevoel had het vakgebied zich ook anders kunnen ontwikkelen, met andere prioriteiten.

Er zijn zat afbeeldingen die hele eenvoudige dynamica vertonen, waar fouten niet vergroot worden. Bijvoorbeeld x gaat naar x, waar niks gebeurt. Een van de belangrijkste methoden voor het begrijpen van chaotische dynamica is om systemen te veranderen door aan een knop te draaien. Laat bijvoorbeeld x afgebeeld worden op $ax(1-x)$, waar de waarde van de parameter a veranderd kan worden. Voor kleine waarden van a gebeurt er niets spannends als we een beginwaarde x kiezen en de afbeelding daar voortdurend op los laten: de waarde komt gewoon steeds dichter bij 0 te liggen. Maar als a gelijk is aan 4, is er sprake van chaotische dynamica. De vraag is wat er gebeurt als we de parameter a laten veranderen. Als het dynamische systeem bij een bepaalde waarde van a zich anders gaat gedragen, wordt gesproken van een bifurcatie (afblijven Peter, is geen jargon). Een bifurcatie, volgens het woordenboek, is een gaffelvormige splitsing. In een dynamisch systeem roept de vorming van een nieuw vast punt hier associaties mee op, maar wordt het begrip bifurcatie algemener voor veranderingen in de dynamica gebruikt. Voor het Groot Dictee der Nederlandse Taal is het goed te weten dat het bijbehorende werkwoord bifurqueren is, aldus de elfde druk van de dikke Van Dale die ik heb ingekeken.

Het begrijpen van chaotische dynamica door te onderzoeken hoe dynamica van eenvoudig steeds ingewikkelder wordt door parameters te veranderen, is wat mij fascineert. Men bekijkt ook wat er kan veranderen in systemen die al chaotisch zijn, als het systeem door middel van parameters veranderd wordt. Uiteindelijk probeert men dynamica te classificeren: wat voor soort gedrag met welke eigenschappen kan er allemaal voorkomen. Dit zal nooit helemaal lukken door het bestaan van allerlei pathologische voorbeelden, maar de hoop is dat veel dynamische systemen in meer of minder detail geclassificeerd kunnen worden. Hyperbolische systemen zoals $x \mapsto 2x \bmod 1$, waar fouten bij elke iteratie met een zelfde factor vergroot worden, werden al in de tijd van Smale begrepen. Zogenaamde 'niet uniform hyperbolische systemen' zoals $x \mapsto 4x(1-x)$, waar de dynamica subtieler ligt, worden veel bestudeerd, geholpen door baanbrekend werk vanaf midden jaren zeventig door Yakov Pesin, Michael Jakobson, Michael Benedicks, Lennart Carleson en anderen. Parallel aan deze ontwikkeling wordt het gebruik van de technieken van dynamische systemen in toepassingen steeds relevanter. Vooral de progressie van deze technieken in de studie van oneindigdimensionale modellen valt op.

Oh ja, de brulkikkers waren de diertjes die me begroetten wanneer ik door het park naar de metro liep in Washington DC. Op weg naar Adams-Morgan, waar de Ethiopische restaurants elkaar beconcurreren zoals de kolenboeren in Gergovia (plaatje 3 op bladzijde 16 van Asterix en het ijzeren schild). En de zeven-minutenregel schrijft voor om een glas bier zeven minuten bij de tap te laten verkommeren voordat de klant het krijgt. Deze schandelijke behandeling komt nog veel voor in Duitse kroegen. Zelfs in Berlijn, waar jongeren massaal zijn overgestapt op het drinken van flesjes Becks, wordt de liefhebber gekastijd (al geef ik wel toe dat een pul Löwenbräu enig wachten waard is). Bovengenoemde steden zijn overigens de plaatsen waar ik als postdoc gewerkt heb.

Ale Jan Homburg
alejan@science.uva.nl