Goochelen met wiskunde*

Dick Koornwinder† en Tom H. Koornwinder‡

14 mei 2005

Samenvatting

Tijdens het evenement *Leve de Wiskunde!*, Universiteit van Amsterdam, 13 mei 2005 krijgen de deelnemers een setje van vier "speelkaarten". Elk van de kaarten geeft een suggestie voor een goocheltruc met een wiskundige achtergrond. In deze lesbrief herhalen we drie van deze beschrijvingen en knopen er nog wat verdere wiskunde aan vast. Ook geven we wat literatuurverwijzingen.

1 Down/Under Deal

Van een pakje kaarten wordt de bovenste kaart op de tafel gelegd, de volgende kaart gaat onderop het pakje, de volgende weer op de tafel en zo verder totdat men uiteindelijk eindigt met één kaart in de hand. Het is aardig om van te voren te weten op welke positie, als hoeveelste kaart van boven, de kaart lag die als laatste overblijft.

Als: $n =$ het aantal kaarten in het pakje,
$p =$ de positie van de kaart in het pakje voor het delen,
$2^x =$ de grootste macht van 2 kleiner dan n,
dan: $p = 2(n - 2^x)$.

Afhankelijk van het aantal kaarten ($3 < n < 53$) is de waarde van 2^x dus 2, 4, 8, 16 of 32.

Toeval bestaat

Een leuke toepassing voor de D/U deal is de volgende truc.

Effect: De toeschouwer krijgt een pakje kaarten dat hij naar hartelust mag couperen. Als dit tot ieders tevredenheid gebeurd is coupeert de toeschouwer het pakje nog eenmaal en legt de bovenste kaart ongezien apart. Door middel van de D/U deal wordt het aantal kaarten geëlimineerd totdat de toeschouwer nog maar één kaart overhoudt. Deze laatste kaart is het "maatje" van de kaart die apart gelegd is. Het zijn bijvoorbeeld de harten 6 (H6) en de ruiten 6 (R6). Jawel ... toeval bestaat!

*De file van deze lesbrief (mogelijk een latere versie) kan gedownload worden van `http://remote.science.uva.nl/~thk/popular/goochelwis/`

†`dkmagic@planet.nl`

‡`thk@science.uva.nl`; Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam

Methode: Het pakje van 12 kaarten dat de toeschouwer ontvangt bestaat uit 6 willekeurige paren. De kaarten worden zo gelegd dat voor elke kaart geldt dat 6 kaarten verder het “maatje” van de kaart ligt. Het couperen van de kaarten verstoort dit beeld niet. Bijvoorbeeld: H9, K8, H5, R7, K3, S4, R9, S8, R5, H7, S3 en K4. De truc is verder zelfwerkend.

Professionele tip: Het aantal kaarten wordt nooit genoemd. Het is zaak dat de toeschouwer denkt dat hij zomaar een stuk of wat kaarten aangereikt krijgt. Nonchalance is hierbij het toverwoord. Als het bovengenoemde setje van 12 kaarten onderop het spel ligt is het heel eenvoudig om, als men het spel in de linkerhand heeft met de beeldzijden naar boven, de kaarten tot en met de harten 9 van het spel in de rechterhand te schuiven en vervolgens aan de toeschouwer te geven.

Wiskundige aspecten

De handeling van bovenste uit een pakje van n kaarten op tafel leggen, volgende kaart onderop het pakje, volgende kaart weer op tafel, volgende kaart weer onderop het pakje, etc., totdat er één kaart in het pakje overblijft, komt precies overeen met de volgende handeling:

Leg n kaarten langs een cirkel, wijs een beginkaart aan, haal deze weg en begin er een stapel mee, ga met de wijzers van de klok mee twee kaarten verder en leg die op de stapel, etc., totdat er één kaart op de cirkel overblijft.
De vraag is nu: als we vanaf de beginkaart met de wijzers van de klok mee posities van de kaarten nummeren in de begintoestand, welke positie had dan de laatst overgebleven kaart?

We kunnen ook het omgekeerde procédé berschrijven:
We hebben één kaart op een cirkel liggen en we hebben een stapel met $n-1$ kaarten. We nemen de bovenste kaart van de stapel en leggen die op de cirkel. Vanuit de net neergelegde kaart springen we tegen de wijzers van de klok in over één kaart heen en leggen de nu bovenste kaart van de stapel daar neer. Weer springen we van daar af tegen de wijzers van de klok in over één kaart heen en leggen de bovenste kaart van de stapel daar neer, etc., totdat de stapel leeg is.
De vraag is nu: als we vanaf de laatst neergelegde kaart met de wijzers van de klok mee de posities van de kaarten nummeren, welk positie p heeft dan de kaart die er als eerste lag (noem die kaart K).

We gaan de laatste vraag beantwoorden:
Als er pas 2 kaarten op de cirkel liggen dan heeft kaart K positie 2 t.o.v. de laatst neergelegde kaart. Om de volgende kaart neer te leggen springen we (tegen de wijzers van de klok in) over kaart K. Dan liggen er 3 kaarten en kaart K heeft positie 2 t.o.v. de laatst neergelegde kaart. Twee kaarten verder, dus met totaal 5 kaarten, zijn we weer over kaart K heengesprongen. Dan duurt het 4 kaarten, dus met totaal 9 kaarten, totdat we weer over kaart K zijn gesprongen. We gaan een patroon zien. Er liggen n kaarten op de stapel. Als 2^x de grootste macht van 2 kleiner dan n is, dan kunnen we vast 2^x+1 kaarten op de cirkel leggen. De laatst neergelegde kaart ligt dan onmiddellijk links van kaart K en kaart K heeft positie 2 t.o.v. deze kaart. Afhankelijk van n moeten we nu nog minimaal 0 en maximaal 2^x-1 kaarten bijleggen. Hierbij zullen we niet over K heenspringen en met elke volgende neergelegde kaart zal de positie van K t.o.v. de laatst neergelegde kaart met 2 toenemen. De formule $p = 2(n-2^x)$ is juist als $n = 2^x+1$ en blijft ook juist voor grotere $n \leq 2 \cdot 2^x$, omdat p in die formule met 2 toeneemt als n met 1 toeneemt. $\square$

De beschrijving met de cirkel geeft ook meer inzicht in het couperen. Een pakje kaarten komt overeen met de kaarten van het pakje neergelegd langs de cirkel zo dat de bovenste kaart van het pakje bovenaan de cirkel ligt (de grote wijzer van de klok op het hele uur) en van boven naar beneden in het pakje gaan correspondeert met het lopen langs de cirkel met de wijzers van de klok mee. Dan correspondeert couperen van het pakje met het geven van een draai aan de cirkel. Als er verder een even aantal ($2m$) kaarten in het pakje zitten en als twee kaarten op afstand m "maatjes" van elkaar zijn (bijv. kaarten met dezelfde waarde), dan zijn op de cirkel tegen over elkaar liggende kaarten maatjes van elkaar (aannemend dat de kaarten langs de cirkel op gelijke afstanden van elkaar gespreid liggen). Dat verandert dus niet bij een draai van de cirkel (d.w.z. bij couperen).

Nu nemen we aan dat we een pakje van $2m$ kaarten hebben met kaarten op afstand m maatjes van elkaar, en dat we de bovenste kaart van het pakje apart leggen. Dan spelen we de Down/Under Deal met de $n = 2m - 1$ overgebleven kaarten en we vragen ons af wat m moet zijn om te zorgen dat de laatst overgebleven kaart maatje is van de apart gelegde kaart. Dus de laatst overgebleven kaart moet in de beginstand in het pakje van $n = 2m - 1$ kaarten positie $p = m$ hebben. Uit $p = 2(n - 2^x)$ volgt dat

$$m = 2(2m - 1 - 2^x),$$

waarbij 2^x de grootste macht van 2 is die kleiner is dan $2m-1$. Uitwerking van deze vergelijking geeft

$$3m = 2(2^x + 1).$$

Dus $2^x + 1$ moet deelbaar zijn door 3. Even proberen geeft dat $2^1 + 1 = 3$, $2^3 + 1 = 9$ en $2^5 + 1 = 33$ deelbaar zijn door 3, maar niet $2^2 + 1 = 5$, $2^4 + 1 = 17$, $2^6 + 1 = 65$. Algemeen zien we dat als $x = 2y - 1$ oneven is, dan

$$2^{2y-1} + 1 = 3 \cdot 2^{2y-3} + (2^{2y-3} + 1) = \cdots = 3 \cdot 2^{2y-5} + 3 \cdot 2^{2y-3} + \cdots + 3 \cdot 2^1 + (2^1 + 1),$$

wat een 3-voud is. Maar we zien ook dat als $x = 2y$ even is, dan $2^{2y} + 1 = 2(2^{2y-1} + 1) - 1$, dus is 2 keer een drievoud min 1, dus is een zesvoud min 1, wat nooit een drievoud kan zijn.

Neem nu x oneven, dan is $m = \frac{2}{3}(2^x + 1)$ een geheel getal, en 2^x is de grootste macht van 2 die kleiner is dan $2m - 1$, want

$$2^x = \tfrac{3}{2}m - 1 < 2m - 1 \leq 3m - 2 = 2^{x+1}.$$

Dan voldoet het pak van $2m$ kaarten met kaarten op afstand m maatjes van elkaar aan onze eisen. We vinden $m = 2$ als $x = 1$, $m = 6$ als $x = 3$, $m = 22$ als $x = 5$.

De onder "Toeval bestaat" beschreven truc zou dus ook kunnen worden uitgevoerd met een pak van 44 kaarten.

Opgave

Er is ook een Under/Down Deal: de bovenste kaart van het pakje gaat onderop, de volgende kaart gaat op tafel, etc. Wat is in de begintoestand de positie van de kaart in het pakje die als laatste zal overblijven? Voor welke waarden van m kunnen we beginnen met een pakje van $2m$ kaarten waarbij de maatjes op afstand m van elkaar zitten, zo dat na apartlegging van de bovenste kaart het verder uitstpelen volgens de nieuwe regels als laatst overblijvende kaart in het pakje het maatje geeft van de kaart die apart gelegd was?

2 Gilbreath Principle

In 1958 publiceerde Norman Gilbreath in het goochelvakblad The Linking Ring zijn truc “Magnetic Colors”. De truc was gebaseerd op een voor die tijd compleet nieuw principe welk terecht de naam van zijn ontdekker gekregen heeft. In een spel kaarten liggen de rode en de zwarte kaarten om en om. Rood, zwart, rood, zwart enz. Het spel wordt gecoupeerd waarbij er voor gezorgd wordt dat de onderste kaarten van beide helften een verschillende kleur hebben. Vervolgens wordt het spel door middel van een “riffle shuffle” geschud. Bij een riffle shuffle laat men de kaarten van beide helften van onder de duimen schieten zodat ze door elkaar komen te liggen. In tegenstelling tot wat men zou verwachten blijkt nu dat als men steeds twee kaarten van bovenaf het spel neemt dit altijd een rode en een zwarte kaart is. Bij Magnetic Colors geeft Gilbreath nadat een van de toeschouwers het spel met een riffle shuffle “grondig” geschud heeft al de aanwezigen twee kaarten van bovenaf het spel. Ondanks het schudden krijgt elke toeschouwer een rode en een zwarte kaart.

Faites vos jeux

Dit gokspelletje maakt ook gebruik van het Gilbreath Principle (GP).

Effect: Nadat een toeschouwer het spel een riffle shuffle gegeven heeft spreidt de goochelaar het spel, met de beeldzijden naar boven, tussen zijn handen uit en laat zien dat het spel grondig geschud is en dat er soms twee kaarten met dezelfde kleur naast elkaar liggen en soms twee kaarten met een verschillende kleur. Het spel wordt weer omgedraaid en de goochelaar deelt een groot aantal paren, met de rugzijden naar boven, op de tafel. De toeschouwer zet in door een munt, of een pinda, te leggen op die paren waarvan hij denkt dat het twee kaarten van dezelfde kleur zijn. De winnende paren zijn dus die paren, die bestaan uit twee rode of twee zwarte kaarten. Als de toeschouwer klaar is met inzetten blijkt het dat hij jammerlijk gefaald heeft en op geen één winnende combinatie heeft ingezet. Om nog wat extra zout in de wonden te wrijven laat de goochelaar zien dat er bij de kaarten waarop hij niet heeft ingezet er nogal wat winnende combinaties zijn. Bovendien heeft de toeschouwer de kaarten zelf geschud ... dus hij moet niet zeuren!

Methode: Dankzij het GP zijn het alleen maar verliezende paren die er op tafel liggen. De kaarten waarop niet is ingezet worden in een stapeltje apart op tafel gelegd. Als het moment gekomen is dat de goochelaar wil laten zien dat er bij die kaarten wel winnende combinaties zitten neemt hij de bovenste kaart van dit stapeltje en schept met die kaart al die kaarten van de tafel op en legt deze kaarten met de beeldzijden omhoog in zijn linkerhand. Door deze handeling, die er feitelijk op neer komt dat de bovenste kaart van dit stapeltje naar onderen gecoupeerd wordt, is de door het GP instandgehouden orde verstoord en kan de goochelaar laten zien dat er bij die kaarten wel winnende paren zitten.

Professionele tip: Om het effect te versterken dient het feit dat bij aanvang in het spel kaarten de rode en de zwarte kaarten exact om en om liggen geheim te blijven voor de toeschouwers. Het spel kaarten kan bij aanvang nonchalant gecoupeerd worden.

Wiskundige aspecten

Bij de *riffle shuffle* heb je twee stapeltjes kaarten, niet noodzakelijk met evenveel kaarten. (Doorgaans heb je die twee stapeltjes gekregen door een pak kaarten te couperen.) Nu maak je een nieuwe stapel uit die twee stapels door telkens willekeurig de onderste van een van de twee oude stapels op de nieuwe stapel te laten vallen. Stel nu dat je de riffle shuffle toepast op twee stapels die allebei de eigenschap hebben dat rode en zwarte kaarten om en om liggen, terwijl van de twee stapels de onderste kaarten verschillende kleur hebben. Neem ook aan dat het totaal aantal kaarten in de twee stapels even is (doorgaans 52). Als we de eerste twee kaarten hebben laten vallen om de nieuwe stapel te vormen, dan zijn er drie mogelijkheden voor die twee kaarten: ze komen allebei uit stapel 1, ze komen allebei uit stapel 2, of er is eentje uit elke stapel gekomen. In alle drie de gevallen zal het om een rode en een zwarte kaart (volgorde onbelangrijk) gaan. Maar bovendien zullen de twee stapels waarop de riffle shuffle verder moet worden losgelaten nog steeds de eigenschappen hebben uit de begintoestand: in beide stapels rode en zwarte om en om, de onderste van beide stapels hebben verschillende kleur, totaal aantal kaarten even. Zo doorgaande zien we in dat in de nieuwe stapel elke twee volgende kaarten (van onder af gerekend) weer verschillende kleur moeten hebben. Dit is de verklaring van het Gilbreath Principle.

We kunnen nog meer opmerken over het pak kaarten dat we verkregen door de riffle shuffle. Voor elke k hebben de kaarten in posities $2k-1$ en $2k$ daar verschillende kleur. Dus twee opeenvolgende kaarten kunnen alleen maar gelijke kleur hebben als ze in posities $2k$ en $2k+1$ liggen. Dat hoeft zeker niet voor elke k waar te zijn, maar het is zeer onwaarschijnlijk dat het voor geen enkele k waar is. Als we couperen tussen twee kaarten van dezelfde kleur en dan de deelstapel die eerst boven lag nu onder leggen, dan zullen alle paren $2k-1$, $2k$ nog steeds verschillende kleur hebben.

Stel nu eens dat we in het oorspronkelijke spel met kaarten rood en zwart om en om er bij het couperen niet op letten of de onderste kaarten van beide stapels verschillende kleur hebben. Het kan dan dus voorkomen dat we twee stapels hebben met rood en zwart om en om maar de twee onderste kaarten in de stapels van zelfde kleur. Wat voor effect heeft de riffle shuffle dan? Wel, nadat er één kaart gevallen is hebben de onderste kaarten van de twee stapels verschillende kleur. We kunnen dan de redenering van zonet toepassen. In de nieuwe stapel zullen de kaarten 2, 3 verschillende kleur hebben, en evenzo 4, 5 en 6, 7, ..., in het algemeen zullen de kaarten $2k$ en $2k+1$ van verschillende kleur zijn. De bovenste kaart in de nieuwe stapel zit niet in zo'n paar. Maar omdat er evenveel rode als zwarte kaarten zijn, zullen de bovenste en de onderste kaart van de nieuwe stapel dan verschillende kleur moeten hebben. We zien nu dus dat twee opeenvolgende kaarten alleen dezelfde kleur kunnen hebben als ze posities $2k-1$ en $2k$ hebben. Dat hoeft zeker niet voor elke k waar te zijn, maar het is zeer onwaarschijnlijk dat het voor geen enkele k waar is. Als we couperen tussen twee kaarten van dezelfde kleur en dan de deelstapel die eerst boven lag nu onder leggen, dan zullen we de gewenste situatie bereiken dat alle paren $2k-1$, $2k$ verschillende kleur hebben.

Een variant van de Gilbreath-truc: Vanwege de bovenstaande analyse kun je de volgende variant uitvoeren. Je volgt de beschrijving van het Gilbreath principle als boven, maar slaat het couperen over. Na de riffle shuffle laat je iemand couperen tussen twee kaarten van dezelfde kleur en je legt de deelstapel die eerst boven lag nu onder. (Als er geen twee kaarten van opeenvolgende kleur gevonden kunnen worden, dan zeg je dat het wonder zich al voltrokken heeft.) Nu geef je al de aanwezigen twee kaarten, van bovenaf het spel genomen. Iedereen zal een rode en een zwarte kaart krijgen.

Zou deze variant nu meer of minder indruk op het publiek maken dan de oorspronkelijke versie? Bedenk dat zelf of experimenteer er mee.

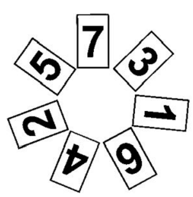
Literatuur Voor de wiskundige verklaring van het Gilbreath Principle maakten we gebruik van hoofdstuk 9 (*Victor Eigen: Mathemagician*) in Martin Gardner's boek [5] en het begin van een tijdschriftartikel van N. G. de Bruijn [2]. Martin Gardner schrijft in genoemd hoofdstuk ook over een met de riffle shuffle gemaakt geheimschrift, wat toch niet zo moeilijk te ontcijferen blijkt te zijn. Enigszins in het verlengde hiervan kun je leuke dingen lezen in §2 (*A card trick*) in een artikel van Bayer en Diaconis [1]. Overigens was Persi Diaconis, nu een belangrijk wiskundige, vroeger professioneel goochelaar. Zie zijn homepage `http://www-stat.stanford.edu/~cgates/PERSI/`.

3 En de winnaar is . . .

Een verrassende mathematische truc van Dr. Jacob Daley uit New York, die door de auteurs verbeterd is.

Effect: De goochelaar legt een bankbiljet op tafel en zegt dat hij hiermee graag iemand blij wil maken. De enige randvoorwaarde is dat hij zelf ook mee mag doen met het spel en genoegen neemt met slechts een kans van 1 op 7 op de prijs. Hij haalt zeven kaarten uit een spel kaarten met de waarden van één (een Aas) tot zeven. Elke kaart maakt kans op de prijs. Om misverstanden te voorkomen zet hij alvast zijn initialen op de voorzijde van de kaart waarmee hij hoopt te winnen. Als een van de andere zes kaarten wint gaat het geld naar de toeschouwer. De kaarten worden geschud en met de rugzijde naar boven in een cirkel op de tafel gelegd en het spel gaat beginnen. De goochelaar wint!

Methode: De volgorde van de kaarten in de cirkel is essentieel. De kaarten moeten met de rug naar boven in de volgorde als in de afbeelding op de tafel komen te liggen.



Bovenaan een 7 en dan vervolgens met de klok mee een 3, Aas, 6, 4, 2 en een 5. De makkelijkste manier om dit te bewerkstelligen is het om de kaarten in deze volgorde onderop het spel te leggen. Vilein, en dat past bij een goochelaar, is het om er een paar kaarten tussen te voegen die niet mee doen. Bijvoorbeeld een paar plaatjeskaarten en een 10. Als de goochelaar de benodigde kaarten uit het spel haalt en op een stapeltje op de tafel legt slaat hij die kaarten gewoon over. Hij pakt vervolgens de 5, die bovenop ligt, en zet er zijn initialen op en legt deze kaart terug op het stapeltje. Om de toeschouwers niet te laten zien waar deze "gewichtige" kaart komt te liggen zegt de goochelaar dat hij het stapeltje achter zijn rug nog even goed zal schudden. In werkelijkheid coupeert hij het stapeltje alleen maar. De kaarten worden dan in een cirkel op de tafel gelegd. De toeschouwer wordt gevraagd een van de kaarten aan te wijzen en om te draaien. Dit is de "indicator" kaart en de waarde van die kaart geeft aan hoeveel kaarten er met de klok mee geteld moeten worden om bij een volgende kaart uit te komen. Bijvoorbeeld, als de 3 als eerste kaart wordt omgedraaid telt de toeschouwer 3 kaarten verder en draait de kaart om die de 4 blijkt te zijn. Dan telt hij 4 kaarten verder enz. Er is een aanvullende regel. Alleen de kaarten met de rug naar boven worden geteld. De laatste kaart, natuurlijk ook een kaart met de rug naar boven, die overblijft is de winnende kaart en jawel dat is de kaart met de initialen van de goochelaar. Er is een uitzondering. Als de eerste kaart die de toeschouwer omdraait de 5 blijkt te zijn hoeft de goochelaar alleen maar te vragen of de toeschouwer met luide stem de initialen van de winnaar wil annonceren. Als dit voorval zich voordoet is het mathematische gehalte van de truc minimaal. Dat is echter een detail. Leve de goochelkunst!

Wiskundige aspecten

Er is ons geen eenvoudige methode bekend om een volgorde van kaarten langs de cirkel zoals hierboven te vinden, waarbij er één winnende kaart is. Een "domme" methode is natuurlijk om alle mogelijkheden van ordening van de kaarten 1 tot/met 7 langs de cirkel na te lopen. Omdat de zaak niet essentieel verandert als we de cirkel draaien, kunnen we één speciale kaart, zeg de 7, bovenaan leggen. Dan nemen we een *permutatie* van 1, 2, 3, 4, 5, 6, dit is een manier om die 6 getallen op een rij te zetten, bijv. 3, 1, 6, 4, 2, 5, en we leggen die 6 kaarten, voorafgegaan door de 7, langs de cirkel met de wijzers van de klok mee. Dat geeft dan juist de ordening in het plaatje hierboven. Maar bij een willekeurig gekozen permutatie zul je meestal geen configuratie krijgen met één winnende kaart.

Het aantal permutaties van n getallen $1, 2, 3, \ldots, n$ bedraagt $n!$ (spreek uit n *faculteit*), d.w.z. het product $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. Dus het aantal permutaties van 1, 2, 3, 4, 5, 6, wat we hierboven moesten nalopen, is $6! = 720$. Voor de computer een kleine klus. Je zou dit zelf kunnen programmeren in bijna elke denkbare programmeertaal. Wij hebben het gedaan in *Mathematica*, een groot pakket voor computer-algebra (zie `http://www.wolfram.com/products/mathematica/`). Er blijkt maar één configuratie van de kaarten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 te zijn met één winnende kaart, precies de hierboven afgebeelde configuratie.

Hoe is het dan met andere waarden van n, dus configuraties met "kaarten" $1, 2, 3, \ldots, n$, waarbij er één winnende kaart is? Voor lage n, bijv. $n = 3$ of 4, kun je het op papier nagaan. Wij hebben er de computer op losgelaten tot/met $n = 12$. In Tabel 1 staan de winnende configuraties.

Opgave (moeilijk; wij weten de oplossing ook niet)

Zie je een patroon in de winnende configuraties in Tabel 1? Voor $n = 6$ en 8 zijn er geen oplossingen. Zou er voor elke $n > 12$ minstens één oplossing zijn? Hoe zou het aantal oplossingen bij gegeven n van n afhangen? Zou er bijv. een positieve constante c en een positieve macht k zijn zo dat het aantal oplossingen bij gegeven n kleiner is dan $c\,n^k$?
In de tabel vinden we nog minder winnende configuraties als we eisen dat de winnende kaart gelijk aan n is. Dan vinden we één winnende configuratie voor $n = 3$ of 4 of 10 en twee winnende configuraties voor $n = 12$. Hoe zou dat worden voor grotere n?

n	aantal opl.	winnende kaart	winnende configuraties
3	2	1	2, 1, 3
		3	1, 2, 3
4	1	4	1, 3, 2, 4
5	1	4	3, 2, 4, 1, 5
6	0		
7	1	5	3, 1, 6, 4, 2, 5, 7
8	0		
9	5	2	1, 6, 8, 5, 4, 2, 7, 3, 9
		3	2, 7, 6, 1, 5, 4, 8, 3, 9
		3	4, 8, 3, 1, 2, 7, 6, 5, 9
		3	6, 7, 4, 2, 3, 5, 1, 8, 9
		6	4, 5, 2, 6, 1, 8, 3, 7, 9
10	6	3	1, 9, 8, 7, 4, 2, 3, 5, 6, 10
		4	6, 1, 9, 3, 4, 5, 2, 8, 7, 10
		5	3, 7, 6, 8, 4, 5, 1, 9, 2, 10
		6	9, 8, 7, 4, 5, 2, 6, 3, 1, 10
		8	1, 7, 2, 6, 4, 3, 8, 5, 9, 10
		10	5, 2, 1, 8, 7, 6, 9, 3, 4, 10
11	13	2	9, 3, 7, 5, 6, 8, 4, 2, 1, 10, 11
		3	10, 9, 8, 1, 6, 5, 4, 2, 3, 7, 11
		3	10, 9, 8, 1, 7, 2, 4, 5, 6, 3, 11
		4	3, 6, 4, 1, 10, 2, 9, 8, 7, 5, 11
		4	5, 1, 10, 9, 6, 3, 8, 4, 2, 7, 11
		4	5, 8, 4, 7, 2, 3, 1, 10, 9, 6, 11
		4	7, 2, 1, 10, 9, 6, 5, 3, 8, 4, 11
		4	10, 1, 8, 6, 5, 2, 4, 7, 3, 9, 11
		5	3, 9, 8, 7, 6, 1, 10, 4, 2, 5, 11
		6	1, 3, 10, 2, 7, 5, 4, 9, 8, 6, 11
		6	3, 4, 6, 1, 10, 2, 9, 8, 7, 5, 11
		6	5, 1, 10, 9, 4, 3, 8, 6, 2, 7, 11
		9	6, 4, 9, 5, 3, 1, 10, 2, 8, 7, 11
12	13	1	6, 5, 8, 3, 1, 7, 11, 10, 4, 9, 2, 12
		3	2, 11, 10, 9, 1, 6, 5, 4, 8, 3, 7, 12
		3	9, 1, 7, 5, 10, 4, 6, 3, 8, 11, 2, 12
		4	5, 2, 4, 3, 7, 6, 1, 11, 10, 9, 8, 12
		4	7, 3, 6, 4, 2, 5, 1, 11, 10, 9, 8, 12
		5	2, 10, 9, 8, 11, 1, 4, 6, 3, 5, 7, 12
		5	8, 3, 4, 5, 1, 6, 11, 9, 2, 10, 7, 12
		5	9, 10, 7, 6, 1, 11, 4, 8, 5, 2, 3, 12
		7	4, 7, 1, 2, 3, 5, 9, 10, 8, 11, 6, 12
		8	2, 8, 7, 1, 11, 9, 3, 5, 10, 6, 4, 12
		8	3, 1, 9, 6, 5, 4, 2, 8, 7, 11, 10, 12
		12	3, 11, 5, 1, 10, 8, 7, 6, 4, 9, 2, 12
		12	7, 11, 1, 9, 3, 2, 10, 6, 5, 4, 8, 12

Tabel 1: Winnende configuraties bij n kaarten, met $n = 3, 4, \ldots, 12$

Een algemener probleem

Merk eerst op dat het bij een winnende configuratie niet van belang is welk nummer de winnende kaart heeft. De winnende kaart zou ook zonder nummer kunnen zijn. Laten we daarom in het vervolg een joker gebruiken voor de winnende kaart.

Ook kunnen we de zaak algemener opzetten met $n-1$ genummerde kaarten en 1 joker, waarbij op sommige kaarten hetzelfde nummer mag staan en waarbij de in het spel voorkomende nummers niet opeenvolgend hoeven te zijn. Verder gaat het netzo als beschreven onder het kopje Methode. De kaarten worden dus in een cirkel op tafel gelegd met de rug naar beneden. Een willekeurige kaart (niet de joker) is de indicator-kaart. Deze wordt omgedraaid en we gaan met de wijzers van de klok mee zoveel met de rug naar boven liggende kaarten verder als de waarde van de net omgedraaide kaart. Daar vinden we de nieuwe indicator-kaart. Enzovoorts. De configuratie rond de cirkel moet zo zijn voorbereid dat we, met welke indicator-kaart behalve de joker er ook begonnen wordt, we altijd bij de joker als laatst om te draaien kaart eindigen.

Dit lijkt op de Down/Under Deal (zie §1). We kunnen het equivalent beschrijven als een pakje kaarten in de hand. In het pakje zit een joker, verder heeft elke kaart een getalwaarde. We maken het pakje uit een winnende configuratie op de cirkel door met een bovenste kaart (niet de joker) te beginnen, daaronder zijn rechter buur op de cirkel, enzovoorts met de wijzers van de klok mee tot we rond zijn. (Beginnen met een andere kaart op de cirkel komt overeen met couperen van het pakje en de onderste deelstapel boven leggen.) We lezen nu de getalwaarde, zeg k, van de bovenste kaart af, leggen de bovenste kaart op tafel (het begin van een stapel), en leggen $k-1$ keer de dan bovenste kaart van het pakje onderop het pakje. Dan lezen we de getalwaarde van de nieuwe bovenste kaart, zeg l, leggen deze kaart op de stapel, en leggen $l-1$ keer de dan bovenste kaart van het pakje onderop het pakje, enzovoorts. Als de joker voortijdig (nog niet als enige in de stapel) als bovenste kaart moet worden afgelezen, dan hadden we geen winnende configuratie. Maar bij een winnende configuratie zal de joker altijd als laatste overblijven.

Bij de Down/Under Deal moesten we de bovenste kaart van het pakje op de stapel leggen en dan de bovenste kaart van het pakje onderop leggen. Dat correspondeert er mee dat alle kaarten (behalve de joker) in het pakje waarde 2 hebben. Dit is zeker geen winnende configuratie: de joker moet op een heel speciale plaats in het pakje liggen om als laatste te eindigen. Dit wordt verstoord zodra we het pakje couperen.

Onze kaarten op de cirkel, of in het pakje, zouden ook waarde 0 of een negatieve waarde mogen hebben. Als een indicator-kaart op de cirkel waarde 0 heeft, dan wordt de eerste nog niet omgedraaide kaart links (tegen de wijzers van de klok in) van deze kaart de nieuwe indicator-kaart. Op het pakje betekent dit dat we de bovenste kaart uit het pakje met waarde 0 op de stapel leggen, en dan de waarde aflezen van de nieuwe bovenste kaart.
Als een indicator-kaart op de cirkel negatieve waarde $-k$ heeft, dan wordt de $k+1$-ste nog niet omgedraaide kaart links (tegen de wijzers van de klok in) van deze kaart de nieuwe indicator-kaart. Op het pakje betekent dit dat we de bovenste kaart uit het pakje met waarde 0 op de stapel leggen, en dan k keer de onderste kaart van het pakje bovenop leggen.

Bekijk nu weer de situatie op de cirkel met n kaarten waaronder de joker. Voor de eerste beurt maakt het niet uit als we $n-1$ bij de getalwaarde van de indicator-kaart optellen of er van aftrekken. Het betekent alleen dat we een keer meer (of minder) helemaal ronddraaien langs de cirkel nadat we de indicator-kaart hebben omgedraaid. Voor de indicator-kaart is dus alleen zijn getalwaarde modulo $n-1$ van belang: we mogen k keer $n-1$, waarbij k een willekeurig geheel getal is, bij zijn getalwaarde optellen. Als we zo de getalwaarde van een kaart hebben veranderd die niet bij de start de indicator-kaart is, maar wel bij de tweede beurt, dan is de zaak verstoord, want bij de tweede beurt moeten we gaan rekenen modulo $n-2$ en niet meer modulo $n-1$. We kunnen dit oplossen door alleen veranderingen in getalwaarde toe te staan waarbij een geheel veelvoud van $(n-1)(n-2)$ wordt opgeteld, dus te rekenen modulo $(n-1)(n-2)$. Bijv. als $n=7$ dan kunnen we bij de getalwaarden gehele veelvouden van $6 \times 5 = 30$ optellen zonder dat dat de eerste twee beurten beïnvloedt.

Maar we willen meer: het spel mag niet beinvloed worden tot aan het moment dat er nog maar 2 kaarten met de rug naar boven liggen. Dit wordt precies bereikt door de getalwaarden te nemen modulo het kleinst gemene veelvoud (kgv) van de getallen 2, 3, 4, ..., $n-2$, $n-1$. Hier zijn de waarden van dit kgv voor lage waarden van n:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
kgv(2,3,...,$n-1$)	2	6	12	60	60	420	840	2520	2520	27720

Als $k = \text{kgv}(2,3,\ldots,n-1)$, dan kan elk van de $n-1$ niet-joker kaarten in principe een van de waarden 1, 2, ..., k hebben, en we zouden k^{n-1} mogelijkheden moeten nalopen om alle winnende configuraties te vinden, veel meer dan de $(n-1)!$ mogelijkheden die we eerst hadden. In de volgende tabel staan benaderde waarden voor deze astronomische aantallen:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$(n-1)!$	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800	39916800
k^{n-1}	4	216	20736	$8 \cdot 10^8$	$5 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^{18}$	$2 \cdot 10^{23}$	$4 \cdot 10^{30}$	10^{34}	$7 \cdot 10^{48}$

Voor $n=3$ en 4 kunnen we de lijst van winnende configuraties nog zonder computerhulp vinden:

Voor $n=3$ is er (modulo 2) maar één winnende: {joker, 1, 2}.
Dit klopt modulo 2 met de twee winnende configuraties {joker, 3, 2} en {joker, 1, 2} in Tabel 1 (geval $n=3$).

Voor $n=4$ zijn er (modulo 6) tien winnende configuraties:
{joker, 1, 1, 2}, {joker, 1, 3, 2}, {joker, 1, 3, 5}, {joker, 2, 4, 6}, {joker, 5, 1, 2},
{joker, 5, 3, 2}, {joker, 5, 4, 2}, {joker, 5, 4, 6}, {joker, 5, 6, 2}, {joker, 5, 6, 6}.
De winnende configuratie {joker, 1, 3, 2} uit Tabel 1 voor $n=4$ zit hierbij.

We gaan nog even terug naar het geval van algemene n. Laat weer $k = \text{kgv}(2,3,\ldots,n-1)$. We zagen dat we essentieel alle mogelijkheden doorlopen als we alle mogelijke getalwaarden $1, 2, \ldots, k$ nemen voor de $n-1$ niet-joker kaarten. Kaarten met getalwaarden 0 of met negatieve getalwaarde vallen hier natuurlijk ook onder. Bijv. getalwaarde 0 kan vervangen worden door k, getalwaarde -1 door $k-1$, etc.

Opgave

Geef voor elke n een (eenvoudige) winnende combinatie.
Verder kun je in de lijst van winnende configuraties voor $n=4$ een symmetrie opmerken: bij elke winnende configuratie kun je een soort gespiegelde configuratie maken die ook winnend is. Kun je ook voor algemene n zo'n symmetrie in de lijst van winnende configuraties formuleren en bewijzen?

Maak de truc realistischer

Bij de truc beschreven in het begin van deze paragraaf 3 komt het bij het publiek misschien wat onrealistisch over dat alle kaarten verschillende waarden hebben. Immers, als je kaarten trekt uit een goed geschud kaartspel, dan zullen daar meestal kaarten bij zijn die dezelfde waarde hebben. Met behulp van de computer kunnen we lijsten van winnende configuraties maken van n kaarten waaonder 1 joker zo dat de overige $n-1$ kaarten waarden van 1 tot/met 13 hebben (neem aas=1, boer=11, vrouw=12, heer=13). In het bijzonder is dit interessant voor $n = 12$, omdat we de 12 kaarten dan mooi "5 minuten van elkaar" rond de cirkel kunnen leggen. Hier is een winnende configuratie die dan gebruikt kan worden: {joker, 3, 1, 5, 2, 6, 8, 9, 6, 1, 8, 3}.

Verdere literatuur

Een klassieker is Martin Gardner's boek [4]. Een veel recenter boek is van S. Brent Morris [7]. Lees daar ondermeer over de *Faro shuffle* (de kaarten van twee pakjes van 26 om en om in elkaar schuiven), waar ook veel aardige wiskunde aan op te hangen is. Een pionier betreffende de wiskunde van de Faro shuffle was Alex Elmsley [3]. Zijn Collected Works bevatten reprints van artikelen die eerder in goochelvakbladen verschenen, bijv. in 1957 in *Pentagram*. Zie tenslotte de passage met het optreden van de goochelaar in het boek van Guillermo Martínez [6]. In deze onconventionele detective-roman spelen twee wiskundigen de hoofdrol.

Referenties

[1] D. Bayer and P. Diaconis, *Trailing the dovetail shuffle to its lair*, Annals of Applied Probability 2 (1992), 294–313.

[2] N. G. de Bruijn, *A riffle shuffle card trick and its relation to quasicrystal theory*, Nieuw Archief voor Wiskunde, Vierde Serie, 5 (1987), 285–301.

[3] A. Elmsley, *The mathematics of the weave shuffle*, in *The Collected Works of Alex Elmsley, Vol. II*, S. Minch (ed.), L&L Publishing, 1994.

[4] M. Gardner, *Mathematics, magic and mystery*, Dover, 1956.

[5] M. Gardner, *Martin Gardner's new mathematical diversions from Scientific American*, Simon and Schuster, New York, 1966.

[6] G. Martínez, *M8: Onzichtbare misdaden*, Vassallucci, 2004.

[7] S. B. Morris, *Magic tricks, card shuffling and dynamic computer memories*, The Mathematical Association of America, 1998.